$a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z$ を実数とする．

(1) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$ が成り立つことを示せ．

(2) $x+y+z=1$ のとき，$x^2+y^2+z^2$ の最小値を求めよ．

(11 福岡教大 中教・環境情報 1(3))

【答】

(1) 略

(2) $\dfrac{1}{3}$

【解答】

(1) (左辺) − (右辺) を整理する．

$$\begin{aligned}
&(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2\\
=&a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2y^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2\\
&-(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2bcyz+2cazx)\\
=&a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2-(2abxy+2bcyz+2cazx)\\
=&(a^2y^2-2abxy+b^2x^2)+(b^2z^2-2bcyz+c^2y^2)+(c^2x^2-2cazx+a^2z^2)\\
=&(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2
\end{aligned}$$

ここで，$a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z$ はすべて実数より

$$(ay-bx)^2 \geqq 0,\ (bz-cy)^2 \geqq 0,\ (cx-az)^2 \geqq 0$$

であり

$$(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2 \geqq 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

すなわち

$$\boldsymbol{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2} \qquad \cdots\cdots \text{(証明終わり)}$$

が成り立つ．等号が成り立つのは，①より

$$(ay-bx)^2=0 \text{ かつ } (bz-cy)^2=0 \text{ かつ } (cx-az)^2=0$$
$$\therefore\quad ay-bx=0 \text{ かつ } bz-cy=0 \text{ かつ } cx-az=0$$

ここで

$$ay-bx=0 \iff a:b=x:y \text{ または } a=b=0 \text{ または } x=y=0 \qquad \cdots\cdots ㋐$$

である．他の 2 式も同じように同値変形されるから，(1) において等号が成り立つのは

$$a:b:c=x:y:z \text{ または } a=b=c=0 \text{ または } x=y=z=0$$

のときである．

- ㋐ については，2 つのベクトル $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ を隣り合う 2 辺にもつ平行四辺形の面積は $|ay-bx|$ であることを思い出すとよい．
  $|ay-bx|=0$ となる条件は，2 つのベクトルのどちらも $\vec{0}$ でない，少なくとも一方が $\vec{0}$ であるで場合分けすると
  $$\begin{aligned}|ay-bx|=0 &\iff \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ または } \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \text{ または } \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\ &\iff a:b=x:y \text{ または } a=b=0 \text{ または } x=y=0\end{aligned}$$
  となる．
- (1) の不等式はコーシー・シュワルツの不等式とよばれるもので内積に関係した不等式である．2 つのベクトル $\vec{a}=(a,\ b,\ c)$，$\vec{x}=(x,\ y,\ z)$ を考える．

(i) $\vec{a}$, $\vec{x}$ の少なくとも一方が $\vec{0}$ のとき，この不等式の両辺は，ともに 0 となり，等号として成立する．

(ii) $\vec{a}$, $\vec{x}$ のどちらも $\vec{0}$ でないとき，$\vec{a}$, $\vec{x}$ のなす角が存在し，これを θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とおくと

$$\begin{aligned} ax+by+cz &= \vec{a}\cdot\vec{x} \\ &= |\vec{a}||\vec{x}|\cos\theta \\ &= \sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cos\theta \end{aligned}$$

両辺を 2 乗して

$$(ax+by+cz)^2 = (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\cos^2\theta$$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$0 \leqq \cos^2\theta \leqq 1$ であるから

$$(ax+by+cz)^2 \leqq (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$$

が成り立つ．等号が成立するのは

$$\cos^2\theta = 1 \iff \theta = 0,\ \pi \iff \vec{a} \mathbin{/\!/} \vec{x} \iff a:b:c = x:y:z$$

のときである．

以上，(i)，(ii) より，任意の実数 a, b, c, x, y, z に対し，不等式は成立し，等号が成立するのは

$$x:y:z = a:b:c \text{ または } a=b=c=0 \text{ または } x=y=z=0$$

のときである．

- 次のような解法も知られている．

a, b, c, x, y, z が実数のとき，任意の実数 t に対して

$$(at-x)^2+(bt-y)^2+(ct-z)^2 \geqq 0 \qquad \cdots\cdots ㋐$$

が成り立つ．㋐ を展開し整理すると

$$(a^2+b^2+c^2)t^2-2(ax+by+cz)t+x^2+y^2+z^2 \geqq 0 \qquad \cdots\cdots ㋑$$

となる．

(i) $a^2+b^2+c^2 \neq 0$ のとき

任意の実数 t に対して ㋑ が成り立つから，(㋑の左辺) $=0$ の判別式 D は $D \leqq 0$ を満たす．すなわち

$$(ax+by+cz)^2-(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \leqq 0$$

$$\therefore\ (ax+by+cz)^2 \geqq (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$$

となり，目標の不等式は成り立つ．等号が成立するのは，㋐ より

$$at-x = bt-y = ct-z = 0$$

$$\therefore \begin{cases} t \neq 0 \text{ のとき} & x:y:z = at:bt:xt = a:b:c \\ t = 0 \text{ のとき} & x=y=z=0 \end{cases}$$

$$\therefore\ x:y:z = a:b:c \text{ または } x=y=z=0$$

のときである．

(ii) $a^2+b^2+c^2 = 0$ のとき

$a=b=c=0$ であり，目標の不等式は任意の実数 x, y, z に対し等号が成立する．

以上，(i)，(ii) より，任意の実数 a, b, c, x, y, z に対し，不等式は成立し，等号が成立するのは

$$x:y:z = a:b:c \text{ または } a=b=c=0 \text{ または } x=y=z=0$$

のときである．

(2) $(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 1)$ を (1) の不等式に代入すると

$$(1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (1\cdot x+1\cdot y+1\cdot z)^2$$

ここで，$x+y+z=1$ であるから，上式は

$$3(x^2+y^2+z^2) \geqq 1^2$$

$$\therefore\quad x^2+y^2+z^2 \geqq \frac{1}{3}$$

等号が成立するのは $x:y:z=1:1:1$ のときであり，$x+y+z=1$ とあわせると $x=y=z=\dfrac{1}{3}$ のときである．

したがって，$x^2+y^2+z^2$ の最小値は $\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$ である． ……(答)