長さ 2 の線分 AB を直径とする半円の弧 AB 上に点 P をとる．このとき，下の問いに答えよ．

(1) 線分 AB の中点を O とし，$\angle\mathrm{POB} = \theta$ とするとき，弧 AP と弦 AP で囲まれる部分の面積を θ で表せ．

(2) 弦 AP がこの半円の面積を 2 等分するとき，不等式 $2\overset{\frown}{\mathrm{BP}} < \overset{\frown}{\mathrm{AP}} < 3\overset{\frown}{\mathrm{BP}}$ が成り立つことを示せ．ただし，$\overset{\frown}{\mathrm{AP}}$，$\overset{\frown}{\mathrm{BP}}$ は弧 AP，弧 BP の長さを表す．

(11 東京学芸大 4)

【答】

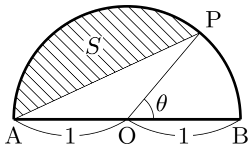
(1) $\dfrac{1}{2}(\pi - \theta - \sin\theta)$

(2) 略

【解答】

(1) 求める面積を S とおくと

$$\begin{aligned} S &= \text{扇形 OAP} - \triangle\mathrm{OAP} \\ &= \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot (\pi - \theta) - \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \sin(\pi - \theta) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}(\pi - \theta - \sin\theta)} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$



である．

(2) 弦 AP が半円の面積を 2 等分するとき

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{\pi \cdot 1^2}{2} \iff \frac{1}{2}(\pi - \theta - \sin\theta) = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \quad \frac{\pi}{2} - \theta - \sin\theta = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

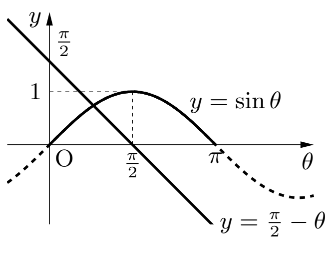
が成り立つ．ここで

$$\begin{aligned} 2\overset{\frown}{\mathrm{BP}} < \overset{\frown}{\mathrm{AP}} < 3\overset{\frown}{\mathrm{BP}} &\iff 2\theta < \pi - \theta < 3\theta \\ &\iff \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

であり，① を満たす θ は $\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{3}$ を満たすことを示せばよい．

$f(\theta) = \dfrac{\pi}{2} - \theta - \sin\theta$ とおく．

$$f(\theta) = 0 \iff \frac{\pi}{2} - \theta = \sin\theta$$



であり，θ は $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲に存在し，この範囲で $f(\theta)$ は単調減少である．

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi - 2\sqrt{2}}{4} > 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi - 3\sqrt{3}}{6} < 0$$

より，① を満たす θ は $\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{3}$ の範囲にただ 1 つ存在する．

よって，題意は示された． $\cdots\cdots$ (証明終わり)