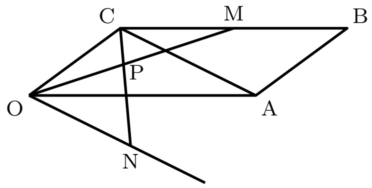
平行四辺形 OABC において，$\mathrm{OA}=6$，$\mathrm{OC}=3$，$\mathrm{AC}=4$ とする．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，以下の問いに答えよ．



(1) 線分 BC の中点を M とする．$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$ で表せ．

(2) 右の図のように，点 O を通り直線 AC に平行な直線上に $\mathrm{OC}=\mathrm{ON}$ となる点 N をとる．$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$ で表せ．

(3) 線分 OM と線分 CN の交点を P とする．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$ で表せ．

(11 工学院大 3)

【答】

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\vec{c}+\dfrac{1}{2}\vec{a}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{3}{4}(\vec{a}-\vec{c})$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{3}{13}\vec{a}+\dfrac{6}{13}\vec{c}$

【解答】

(1) M は線分 BC の中点なので

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\boldsymbol{\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{ON}} \,/\!/\, \overrightarrow{\mathrm{CA}}$ かつ $\mathrm{ON}:\mathrm{CA}=\mathrm{OC}:\mathrm{CA}=3:4$ なので

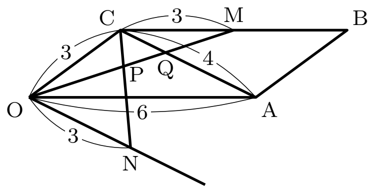
$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\boldsymbol{\frac{3}{4}(\vec{a}-\vec{c})} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) OM，AC の交点を Q とおく．

△QOA ∽ △QMC であり，相似比は

$$\mathrm{OA}:\mathrm{CM}=6:3=2:1$$



であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

また，△PON ∽ △PQC であり，相似比は

$$\mathrm{ON}:\mathrm{QC}=3:\left(\frac{1}{3}\times 4\right)=9:4$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{9}{13}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

である．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{9}{13}\times\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{6}{13}\left(\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a}\right)=\boldsymbol{\frac{3}{13}\vec{a}+\frac{6}{13}\vec{c}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 四角形 OABC が平行四辺形であることから比に着目した解答を示したが，P を 2 直線の交点とみるなら，次の解法の方が一般性がある．

 P は直線 OM 上の点であるから，実数 s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{s}{2}\vec{a} + s\vec{c} \qquad \cdots\cdots ①$$

と表すことができる．一方，P は直線 CN 上の点でもあるから，実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}} + t\overrightarrow{\mathrm{ON}} \\ &= (1-t)\vec{c} + t\left(\frac{3}{4}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{c}\right) \\ &= \frac{3}{4}t\vec{a} + \left(1 - \frac{7}{4}t\right)\vec{c} \qquad \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

と表すこともできる．

 $\vec{a}$，$\vec{c}$ は 1 次独立であるから，①，②の係数を比較して

$$\begin{cases} \dfrac{s}{2} = \dfrac{3}{4}t \\ s = 1 - \dfrac{7}{4}t \end{cases}$$

$$\therefore \quad s = \frac{6}{13},\ t = \frac{4}{13}$$

 よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{3}{13}\vec{a} + \frac{6}{13}\vec{c}$$

である．