四面体 OABC と点 P について，

$$6\overrightarrow{\mathrm{OP}}+3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2\overrightarrow{\mathrm{BP}}+4\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$$

が成り立っている．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 3 点 A, B, C を通る平面と直線 OP との交点を Q とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) 直線 AQ と辺 BC との交点を R とするとき，四面体 OABC の体積 V に対する四面体 PABR の体積 W の比 $\dfrac{W}{V}$ を求めよ．

(11 宮城教大 1)

【答】

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{3\vec{a}+2\vec{b}+4\vec{c}}{9}$

(2) $\dfrac{4}{15}$

【解答】

$$6\overrightarrow{\mathrm{OP}}+3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2\overrightarrow{\mathrm{BP}}+4\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0} \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) ① の始点を O にそろえると

$$6\overrightarrow{\mathrm{OP}}+3(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+2(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})+4(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})=\vec{0}$$

$$15\overrightarrow{\mathrm{OP}}=3\vec{a}+2\vec{b}+4\vec{c}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3\vec{a}+2\vec{b}+4\vec{c}}{15}=\frac{3}{5}\times\frac{3\vec{a}+2\vec{b}+4\vec{c}}{9}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\dfrac{3\vec{a}+2\vec{b}+4\vec{c}}{9}$ とおくと，$\dfrac{3}{9}+\dfrac{2}{9}+\dfrac{4}{9}=1$ より，X は平面 ABC 上の点である．さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ より，X は直線 OP 上の点でもある．したがって，X は平面 ABC と直線 OP の交点であり，Q と一致する．よって

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{3\vec{a}+2\vec{b}+4\vec{c}}{9}} \qquad \cdots\cdots ② \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

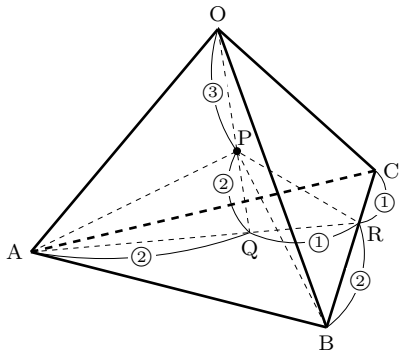
(2) (1) より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ であり

$$\mathrm{OP}:\mathrm{PQ}=3:2$$

である．また，② は

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{3\vec{a}+6\times\dfrac{2\vec{b}+4\vec{c}}{6}}{9}=\frac{\vec{a}+2\times\dfrac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}}{3}$$

と変形される．



$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\dfrac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}$ とおくと，Y は線分 BC を 2 : 1 に内分する点であり，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OY}}}{3}$ より，Q は線分 AY を 2 : 1 に内分する点である．したがって，Y は辺 BC と直線 AQ の交点であり，R と一致する．

よって

$$
\begin{aligned}
W &= (\text{四面体 PABR の体積}) \\
&= \frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{OP}}(\text{四面体 OABR の体積}) \\
&= \frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{OP}} \times \frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{BC}}(\text{四面体 OABC の体積}) \\
&= \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} V
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\frac{W}{V} = \frac{4}{15}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である.