$a$ を実数の定数とする．2 つの関数

$$f(x) = x^2 - (a-2)x + 2, \quad g(x) = -x^2 + 2x + a - 2$$

について，以下の各問に答えよ．

(1) すべての実数 $x$ に対して，$f(x) > g(x)$ が成り立つような $a$ の値の範囲を求めよ．
(2) すべての実数 $x_1$，$x_2$ に対して，$f(x_1) > g(x_2)$ が成り立つような $a$ の値の範囲を求めよ．

(12 茨城大 後 工 2)

---

【答】

(1) $-4 - 4\sqrt{3} < a < -4 + 4\sqrt{3}$
(2) $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$

---

【解答】

(1)
$$f(x) > g(x) \iff x^2 - (a-2)x + 2 > -x^2 + 2x + a - 2$$
$$\iff 2x^2 - ax + 4 - a > 0$$

これがすべての実数 $x$ で成り立つための条件は，

$$(\text{判別式}) < 0$$

である．

$$\text{判別式} : D = a^2 - 8(4-a) = a^2 + 8a - 32$$

であるから，求める $a$ の値の範囲は

$$\boldsymbol{-4 - 4\sqrt{3} < a < -4 + 4\sqrt{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) すべての実数 $x_2$，$x_2$ に対して，$f(x_1) > g(x_2)$ が成り立つための条件は

$$\min f(x) > \max g(x) \qquad \cdots\cdots ①$$

である．ここで，

$$f(x) = \left(x - \frac{a-2}{2}\right)^2 - \frac{(a-2)^2}{4} + 2 = \left(x - \frac{a-2}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + a + 1$$
$$g(x) = -(x-1)^2 + a - 1$$

であるから

$$① \iff -\frac{a^2}{4} + a + 1 > a - 1 \iff a^2 < 8$$

であり，求める $a$ の値の範囲は

$$\boldsymbol{-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．