3次関数 $f(x)=-x^3+3ax^2+b$ (a, b は実数の定数) について，次の問に答えよ．

(1) $a=1$, $b=3$ のとき，$f(x)$ の極値を求め，$y=f(x)$ のグラフをかけ．

(2) $0 \leqq x \leqq 2$ のとき $f(x) \leqq 4$ となるための a, b の条件を求めよ．

(12 東京海洋大 海洋科学 1)

【答】

(1) 極小値 $f(0)=3$，極大値 $f(2)=7$，図は略

(2) $b \leqq \begin{cases} 4 & (a \leqq 0 \text{ のとき}) \\ 4-2a^3 & (0<a<1 \text{ のとき}) \\ b \leqq 12-12a & (1 \leqq a \text{ のとき}) \end{cases}$

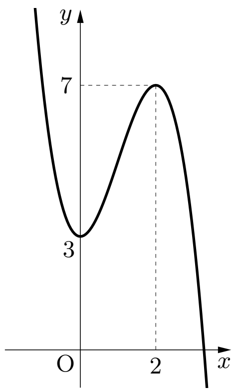
【解答】

$$f(x)=-x^3+3ax^2+b$$

(1) $a=1$, $b=3$ のとき

$$f(x)=-x^3+3x^2+3$$

$$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$$



よって，$f(x)$ の増減は下表となる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f'(x)$	↘		↗		↘

これより，$f(x)$ の極値は

極小値 $f(0)=3$，　極大値 $f(2)=7$　……(答)

であり，$y=f(x)$ のグラフは右図となる．

(2) $0 \leqq x \leqq 2$ での $f(x)$ の最大値が 4 以下となるための a, b の条件を求めればよい．

$$f'(x)=-3x^2+6ax$$
$$=-3x(x-2a)$$

$f(2a)$ が $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で極値となるか否かで場合分けする．

(i) $a \leqq 0$ のとき，$0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で $f'(x) \leqq 0$ であり，最大値は $f(0)=b$ である．

$$\therefore \quad b \leqq 4$$

(ii) $0<a<1$ のとき，$x=a$ のとき極大かつ最大であり，最大値は $f(a)=2a^3+b$ である．

$$\therefore \quad 2a^3+b \leqq 4 \qquad \therefore \quad b \leqq 4-2a^3$$

(iii) $1 \leqq a$ のとき，$0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で $f'(x) \geqq 0$ であり，最大値 $f(2)=12a+b-8$ である．

$$\therefore \quad 12a+b-8 \leqq 4 \qquad \therefore \quad b \leqq 12-12a$$

以上から，求める a, b の条件は

$$\boldsymbol{b \leqq \begin{cases} 4 & (a \leqq 0 \text{ のとき}) \\ 4-2a^3 & (0<a<1 \text{ のとき}) \\ b \leqq 12-12a & (1 \leqq a \text{ のとき}) \end{cases}}$$
……(答)

である．