関数 $f(x)$ が $p$ を周期とする周期関数であるとは，すべての $x$ で等式 $\boxed{\text{ア}}$ が成立することである．関数 $g(x)=\sin^2\left(5x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ の正の最小の周期は $\boxed{\text{イ}}$ である．

(12 山梨大 工・生命環境 1(1))

---

【答】

| ア | イ |
|---|---|
| $f(x+p)=f(x)$ | $\dfrac{\pi}{5}$ |

---

【解答】

$f(x)$ が $p$ を周期とする周期関数であるということは，すべての $x$ で等式

$$\boldsymbol{f(x+p)=f(x)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

が成立することである．

半角の公式を用いると

$$\begin{aligned} g(x)&=\sin^2\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left\{1-\cos\left(10x+\frac{2}{3}\pi\right)\right\}\end{aligned}$$

であり，$g(x)$ の正の最小の周期は

$$\frac{2\pi}{10}=\boldsymbol{\frac{\pi}{5}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 周期の定義から $p$ を求めるなら，すべての $x$ について $g(x+p)=g(x)$ を満たす $p$ を求める．これは

$$\frac{1}{2}\left\{1-\cos\left(10(x+p)+\frac{2}{3}\pi\right)\right\}=\frac{1}{2}\left\{1-\cos\left(10x+\frac{2}{3}\pi\right)\right\}$$

$$\therefore\quad \cos\left(10(x+p)+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(10x+\frac{2\pi}{3}\right)$$

が成り立つような $p$ を求めることであり，$X=10x+\dfrac{2}{3}\pi$ とおくと，すべての $X$ について

$$\cos(X+10p)=\cos X$$

が成り立つような $p$ を求めることである．

(ここで，$\cos X$ の正の最小周期が $2\pi$ であることを既知とすると

$$10p=2\pi \qquad \therefore\quad p=\frac{2\pi}{10}=\frac{\pi}{5}$$

となるが，これは使わないことにする．)

左辺を加法定理で展開し，式を整理すると

$$\cos X\cos 10p-\sin X\sin 10p=\cos X$$

$$\sin 10p\sin X+(1-\cos 10p)\cos X=0$$

$$2\sin 5p\cos 5p\sin X+2\sin^2 5p\cos X=0 \quad (\because\ 2\text{ 倍角の公式，半角の公式})$$

$$\sin 5p\sin(X+5p)=0$$

これがすべての $X$ について成立する条件は

$$\sin 5p=0 \qquad \therefore\quad 5p=n\pi\ (n\text{ は整数}) \qquad \therefore\quad p=\frac{n\pi}{5}$$

よって，正の最小の周期は $n=1$ のときの $\dfrac{\pi}{5}$ である．