x 軸を準線とし $y=x$ に $(3,\ 3)$ で接している放物線がある．焦点の座標は $\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$ であり，放物線の方程式を $y=ax^2+bx+c$ とすると，

$a=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$，$b=\boxed{\text{オ}}$，$c=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である．

(12 順天堂大 医 1(3))

【答】

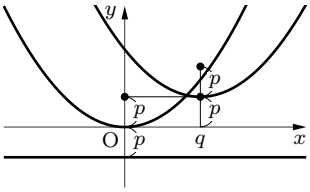
ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
3	0	1	6	0	3	2

【解答】

x 軸を準線とする放物線は

原点を頂点とする放物線
$x^2=4py$ (p は 0 でない定数) を
x 軸方向に q，y 軸方向に p だけ平行移動

することにより得られる．この方程式は



$$(x-q)^2=4p(y-p)$$

$$\therefore\quad y=\frac{(x-q)^2}{4p}+p\quad(\because\ p\neq 0)\qquad\cdots\cdots ①$$

である．この放物線は $y=x$ に点 $(3,\ 3)$ で接しているから

$$\frac{(x-q)^2}{4p}+p=x$$

$$(x-q)^2+4p^2=4px$$

$$\therefore\quad x^2-2(q+2p)x+q^2+4p^2=0$$

は $x=3$ を重解にもつ．

$$x^2-2(q+2p)x+q^2+4p^2=(x-3)^2$$

$$\therefore\quad x^2-2(q+2p)x+q^2+4p^2=x^2-6x+9$$

が成り立つ．係数を比較すると

$$\begin{cases}q+2p=3\\ q^2+4p^2=9\end{cases}\iff\begin{cases}q=3-2p\\ (3-2p)^2+4p^2=9\end{cases}$$

第 2 式を解くと

$$8p^2-12p=0$$

$$4p(2p-3)=0$$

$$\therefore\quad p=\frac{3}{2}\quad(\because\ p\neq 0)$$

このとき $q=0$ であり，焦点の座標 $(q,\ 2p)$ は

$$\boldsymbol{(0,\ 3)}\qquad\cdots\cdots(答)$$

であり，放物線の方程式は ① より

$$\boldsymbol{y=\frac{1}{6}x^2+\frac{3}{2}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．