$a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z$ はすべて正の実数である．次の問いに答えよ．

(1) 不等式 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$ が成り立つことを証明せよ．
(2) (1) において等号が成り立つのはどのようなときかを示せ．
(3) $a^2+b^2+c^2=25,\ x^2+y^2+z^2=36,\ ax+by+cz=30$ のとき，$\dfrac{a+b+c}{x+y+z}$ の値を求めよ．

(13 秋田大 教育文化 2)

【答】

(1) 略
(2) $a:b:c=x:y:z$
(3) $\dfrac{5}{6}$

【解答】

(1) (左辺) − (右辺) を整理する．

$$\begin{aligned}
&(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2\\
=&a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2y^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2\\
&-(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2bcyz+2cazx)\\
=&a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2-(2abxy+2bcyz+2cazx)\\
=&(a^2y^2-2abxy+b^2x^2)+(b^2z^2-2bcyz+c^2y^2)+(c^2x^2-2cazx+a^2z^2)\\
=&(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2
\end{aligned}$$

ここで，$a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z$ はすべて実数より

$$(ay-bx)^2 \geqq 0,\ (bz-cy)^2 \geqq 0,\ (cx-az)^2 \geqq 0$$

であり

$$(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2 \geqq 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．よって

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2 \qquad \cdots\cdots (\text{証明終わり})$$

は成り立つ．

(2) ① の等号が成り立つのは，

$$(ay-bx)^2=0 \text{ かつ } (bz-cy)^2=0 \text{ かつ } (cx-az)^2=0$$
$$\therefore\quad ay-bx=0 \text{ かつ } bz-cy=0 \text{ かつ } cx-az=0$$

のときである．$a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z$ はすべて 0 でないから

$$\frac{a}{b}=\frac{x}{y} \text{ かつ } \frac{b}{c}=\frac{y}{z} \text{ かつ } \frac{c}{a}=\frac{z}{x}$$

すなわち，(1) において等号が成り立つのは

$$\boldsymbol{a:b:c=x:y:z} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

のときである．

- (1) の不等式は任意の実数 $a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z$ に対しても成り立つ．このときの等号成立条件は

  $x:y:z=a:b:c$ または $a=b=c=0$ または $x=y=z=0$

  である．

- (1) の不等式はコーシー・シュワルツの不等式とよばれるもので内積に関係した不等式である．

  2 つのベクトル $\vec{a}=(a,\ b,\ c)$, $\vec{x}=(x,\ y,\ z)$ を考える．

  $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{x}\neq\vec{0}$ より，$\vec{a}$, $\vec{x}$ のなす角が存在し，これを θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とおくと

$$\begin{aligned} ax+by+cz &= \vec{a}\cdot\vec{x} \\ &= |\vec{a}||\vec{x}|\cos\theta \\ &= \sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cos\theta \end{aligned}$$

  両辺を 2 乗して

$$(ax+by+cz)^2=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\cos^2\theta$$

  $0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，$0\leqq\cos^2\theta\leqq 1$ であるから

$$(ax+by+cz)^2\leqq(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$$

  である．等号が成り立つのは

$$\cos^2\theta=1 \iff \theta=0,\ \pi \iff \vec{a}\ /\!/\ \vec{x} \iff a:b:c=x:y:z$$

  のときである．

- 次のような解法も知られている．

  $a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z$ がすべて正の実数であるとき，任意の実数 t に対して

$$(at-x)^2+(bt-y)^2+(ct-z)^2\geqq 0 \qquad \cdots\cdots ㋐$$

  が成り立つ．㋐ を展開し整理すると

$$(a^2+b^2+c^2)t^2-2(ax+by+cz)t+x^2+y^2+z^2\geqq 0 \qquad \cdots\cdots ㋑$$

  となる．$a^2+b^2+c^2\neq 0$ であるから，㋑ の左辺は t の 2 次式であり，任意の実数 t に対して ㋑ が成り立つ条件は，(㋑の左辺) $=0$ の判別式 D が $D\leqq 0$ を満たすことである．すなわち

$$(ax+by+cz)^2-(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\leqq 0$$

$$\therefore\quad (ax+by+cz)^2\geqq(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$$

  となり，目標の不等式は成り立つ．等号が成立するのは，㋐ より

$$at-x=bt-y=ct-z=0$$

$$\therefore\quad x=at \text{ かつ } y=bt \text{ かつ } z=ct$$

  $x,\ y,\ z$ は正の実数であるから，$t\neq 0$ であり

$$x:y:z=a:b:c$$

  のときである．

  よって，任意の実数 $a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z$ に対し，不等式は成立し，等号が成立するのは

$$x:y:z=a:b:c$$

  のときである．

(3) $a^2+b^2+c^2=25,\ x^2+y^2+z^2=36,\ ax+by+cz=30$ のとき

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=25\cdot 36=(5\cdot 6)^2=30^2,$$

$$(ax+by+cz)^2=30^2$$

であり，これは (1) において等号が成り立つ場合である．

したがって，(2) より

$$a=kx,\ b=ky,\ c=kz$$

とおくことができる．$a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z$ はすべて正の実数より，k は正の実数である．このとき

$$\frac{a+b+c}{x+y+z}=\frac{kx+ky+ky}{x+y+z}=k$$

である．$a^2+b^2+c^2=25$ より

$$(kx)^2+(ky)^2+(kz)^2=25$$

$$k^2=\frac{25}{x^2+y^2+z^2}=\frac{25}{36}=\left(\frac{5}{6}\right)^2 \qquad \therefore \quad k=\frac{5}{6}\ (>0)$$

よって

$$\frac{a+b+c}{x+y+z}=\boldsymbol{\frac{5}{6}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．