a を実数とする．以下の問いに答えよ．

(1) 2 次方程式 $x^2-2(a+1)x+3a=0$ が，$-1 \leqq x \leqq 3$ の範囲に 2 つの異なる実数解をもつような a の値の範囲を求めよ．

(2) a が (1) で求めた範囲を動くとき，放物線 $y=x^2-2(a+1)x+3a$ の頂点の y 座標が取りうる値の範囲を求めよ．

(13 東北大 文系 1)

【答】

(1) $-\dfrac{3}{5} \leqq a \leqq 1$

(2) $-\dfrac{49}{25} \leqq$ (頂点の y 座標) $\leqq -\dfrac{3}{4}$

【解答】

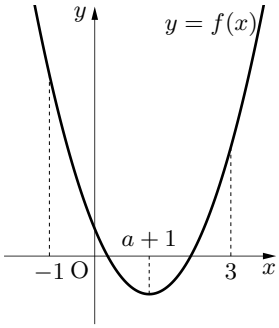
(1) $f(x)=x^2-2(a+1)x+3a$ とおく．

$$f(x)=(x-a-1)^2-a^2+a-1$$

$f(x)=0$ が $-1 \leqq x \leqq 3$ の範囲に 2 つの異なる実数解をもつための条件は

$$\begin{cases} \text{頂点の } y \text{ 座標}: f(a+1)<0 \\ \text{軸の位置}: -1<a+1<3 \\ \text{左端点の符号}: f(-1) \geqq 0 \\ \text{右端点の符号}: f(3) \geqq 0 \end{cases}$$

である．



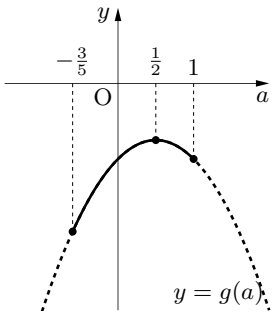
$$\begin{cases} f(a+1)=-\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{3}{4}<0 \quad (\text{つねに成立}) \\ -2<a<2 \\ f(-1)=5a+3 \geqq 0 \\ f(3)=-3a+3 \geqq 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{-\frac{3}{5} \leqq a \leqq 1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) 放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標を $g(a)$ とおく．

$$g(a)=-a^2+a-1$$
$$=-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$$

$-\dfrac{3}{5} \leqq a \leqq 1$ における $y=g(a)$ のグラフは右図となる．



頂点の y 座標 $g(a)$ の取りうる値の範囲は

$$g\left(-\frac{3}{5}\right) \leqq g(a) \leqq g\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{-\frac{49}{25} \leqq g(a) \leqq -\frac{3}{4}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$