関数 $f(x)=x^3+3ax^2+3(10-3a)x$ が極値をもつような実数 a の範囲を求めよ．

(13 東京都市大 工・知識工 2(1))

【答】 $a<5$ または $2<a$

【解答】

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3+3ax^2+3(10-3a)x \\ f'(x) &= 3x^2+6ax+3(10-3a) \\ &= 3(x+a)^2-3a^2-9a+30 \end{aligned}$$

$f(x)$ が極値をもつための条件は，$f'(x)$ の符号が変化する実数 x が存在すること，すなわち

$$\begin{aligned} &-3a^2-9a+30<0 \\ &a^2+3a-10>0 \\ &(a+5)(a-2)>0 \end{aligned}$$

が成り立つことであり，求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{a<5 \text{ または } 2<a} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- $f'(x)$ の符号が変化する実数 x が存在する条件は，$f'(x)=0$ の判別式を D とすると $D>0$ である．

  $$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= 9a^2-9(10-3a) \\ &= 9(a^2+3a-10) \\ &= 9(a+5)(a-2) \end{aligned}$$

  であるから，求める条件は

  $$a<5 \text{ または } 2<a$$

  であるとしてもよい．