三角関数の極限に関する公式

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

を示すことにより，$\sin x$ の導関数が $\cos x$ であることを証明せよ．

(13 大阪大 理系 1)

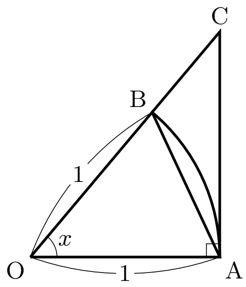
【答】 略

【解答】

まず，三角関数の極限に関する公式について

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

右図において，$\angle \mathrm{AOB} = x$, $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = 1$, $\angle \mathrm{OAC} = \dfrac{\pi}{2}$ とする．



このとき，△OAB，扇形 OAB，△OAC の面積を比べると

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$

$$\sin x < x < \tan x$$

$$\frac{\sin x}{x} < 1 < \frac{\sin x}{x \cos x}$$

$$\therefore \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$\displaystyle\lim_{x \to +0} \cos x = 1$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$ のとき

$t = -x$ とおくと

$$\lim_{x \to -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{t \to +0} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t \to +0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

以上より

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$\cdots\cdots$ (証明終わり)

つぎに，$\sin x$ の導関数を求める．導関数の定義により

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \sin x &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2 \cos \dfrac{2x+h}{2} \sin \dfrac{h}{2}}{h} \quad (\because \text{ 和を積に直す公式}) \\
&= \lim_{h \to 0} \left\{ \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin \dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}} \right\} \\
&= \cos x \cdot 1 \\
&= \cos x
\end{aligned}$$

よって

$$(\sin x)' = \cos x$$

$\cdots\cdots$ (証明終わり)

- $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ を示すとき，教科書にあわせて面積を用いた．扇形の面積をどう求めるのかを考えるとこの証明は少々問題があるが，入試問題の解答としてはこれでよいであろう．

  扇形の面積は円の面積から求められる．半径 r の円の面積は

  $$2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

  として求められ，これは $x=r\cos\theta$ と置換することにより

  $$2\int_{\pi}^{0} r\sin\theta\cdot(-r\sin\theta)\,d\theta=2\int_{0}^{\pi} r^2\sin^2\theta\,d\theta$$

  として三角関数の積分になる．積分は微分の逆演算であり，結局，三角関数の微分に戻ってくる．したがって，この解答は循環論法になってしまっている．

  解析概論 (高木貞二，21 頁) では弧長を使って証明している．