$f(x)=2x\log(x+\sqrt{x^2+1})$，$g(x)=\dfrac{1}{2}x$ について，合成関数 $g(f(x))$ を微分せよ．ただし，対数は自然対数である．

(13 茨城大 後 工 1(2))

【答】 $\{g(f(x))\}'=\log(x+\sqrt{x^2+1})+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

【解答】

$$f(x)=2x\log(x+\sqrt{x^2+1}),\ g(x)=\frac{1}{2}x$$

$f(x)$，$g(x)$ を x でそれぞれ微分すると

$$\begin{aligned}f'(x)&=2\cdot\log(x+\sqrt{x^2+1})+2x\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)\\&=2\left\{\log(x+\sqrt{x^2+1})+\frac{x(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}(x+\sqrt{x^2+1})}\right\}\\&=2\left\{\log(x+\sqrt{x^2+1})+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right\}\\g'(x)&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

である．合成関数の微分法により

$$\begin{aligned}\{g(f(x))\}'&=g'(f(x))\cdot f'(x)\\&=\frac{1}{2}\cdot f'(x)\\&=\boldsymbol{\log(x+\sqrt{x^2+1})+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．