自然対数の底 e を $e=\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ により定義する．次の各問に答えよ．

(1) $\lim_{h\to 0}\dfrac{\log_e(1+h)}{h}=1$ を示せ．

(2) 関数 $f(x)=\log_e x$ の導関数を定義に従って求めよ．

(3) 関数 $y=e^x$ の導関数を逆関数の導関数の公式と (2) の結果を用いて求めよ．

(13 高知工科大 3)

【答】

(1) 略

(2) $f'(x)=\dfrac{1}{x}$

(3) $(e^x)'=e^x$

【解答】

(1) e の定義 $e=\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ を利用する．

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log_e(1+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\log_e\{(1+h)^{\frac{1}{h}}\}=\log_e e=1$$

である．　…… (証明終わり)

(2) 導関数の定義より

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_e(x+h)-\log_e x}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{\log_e\dfrac{x+h}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_e\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}{h}\end{aligned}$$

ここで，$\dfrac{h}{x}=t$ とおくと，$h=tx$, $h\to 0$ のとき $t\to 0$ だから

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{t\to 0}\frac{\log_e(1+t)}{tx}=\frac{1}{x}\lim_{t\to 0}\frac{\log_e(1+t)}{t}\\ &=\frac{1}{x}\cdot 1\quad (\because\ (1))\\ &=\frac{1}{x}\end{aligned}$$

よって

$$\boldsymbol{f'(x)=\frac{1}{x}}$$ ……(答)

である．

(3) $y=e^x$ より $x=\log_e y$ (2) の結果を用いると

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y}$$

逆関数の導関数の公式 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$ を用いると

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{1}{y}}=y=e^x$$

よって

$$\boldsymbol{(e^x)'=e^x}$$ ……(答)

である．