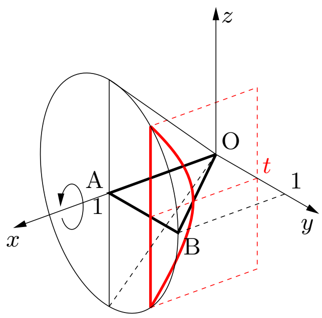
xyz 空間内の 3 点 O(0, 0, 0), A(1, 0, 0), B(1, 1, 0) を頂点とする三角形 OAB を x 軸のまわりに 1 回転させてできる円すいを V とする．円すい V を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

(13 大阪大 理系 4)

【答】 $\dfrac{8}{3}\pi$

【解答】



円すい V の x 軸に垂直な平面 $x=a$ $(0 \leqq a \leqq 1)$ による切り口は，中心が $(a,\ 0,\ 0)$ で半径が a の円板である．この方程式は

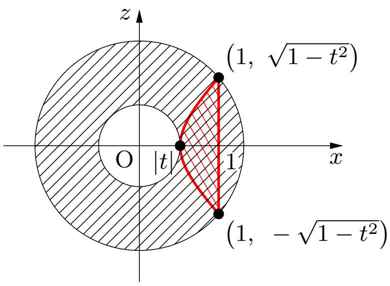
$$\begin{cases} x=a & (\text{平面}) \\ y^2+z^2 \leqq a^2 & (\text{円柱体}) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a=x \\ y^2+z^2 \leqq x^2 \end{cases}$$

a は $0 \leqq a \leqq 1$ の範囲を動くから，円すい V を表す不等式は

$$\begin{cases} y^2+z^2 \leqq x^2 \\ 0 \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

である．



次に，V の y 軸に垂直な平面 $y=t$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$ による切り口を考える．これは

$$\begin{cases} y=t & (\text{平面}) \\ y^2+z^2 \leqq x^2 & \\ 0 \leqq x \leqq 1 & (\text{円すい}) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y=t \\ \sqrt{t^2+z^2} \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

これを zx 平面に射影すると右図の赤の斜線部分となる．

V を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の平面 $y=t$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$ による切り口は，赤の斜線部分を y 軸のまわりに 1 回転させてできる図形 (右図の黒の斜線部分) である．この面積を $S(t)$ とすると

$$\begin{aligned} S(t) &= \pi\left\{1^2+\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2\right\}-\pi|t|^2 \\ &= 2\pi(1-t^2) \end{aligned}$$

したがって，求める体積は

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} S(t)\,dt &= 2\int_0^1 2\pi(1-t^2)\,dt \\ &= 4\pi\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \boldsymbol{\frac{8}{3}\pi} \end{aligned}$$

……(答)