ボタンを押すと X, Y, Z いずれかの文字が画面に表示される機械がある．その機械では，X と Y が表示される確率は，等しくかつ Z が表示される確率の 2 倍である，とする．

いま，ボタンを 5 回続けて押す．このとき，(XYZYX のように) X, Y, Z すべての文字が少なくとも 1 回表示される確率を求めよ $\boxed{(3)}$．

(13 横浜市大 医 1(3))

(3)
$\dfrac{336}{625}$

解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

まずは，1 回の試行で文字 X，Y，Z が表示されるそれぞれの確率を

(確率の総和) $=1$

を用いて求めましょう．あとは 3 つの事象の反復試行です．

【解答】

ボタンを 1 回押したときに，文字 X，Y，Z が表示される確率をそれぞれ x，y，z とおくと，与えられた条件より

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x=y=2z \end{cases} \qquad \therefore \quad x=y=\frac{2}{5},\ z=\frac{1}{5}$$

←― (確率の総和)=1 を用いて，各事象の確率を求める．

ボタンを 5 回押すとき，X，Y，Z の表示回数を $(X,\ Y,\ Z)$ で表すと，X，Y，Z すべての文字が少なくとも 1 回表示されるのは

(i) (3，1，1)　(ii) (1，3，1)　(iii) (1，1，3)
(iv) (2，2，1)　(v) (2，1，2)　(vi) (1，2，2)

のいずれかである．表示される順序も考えると，それぞれの確率は次のとおりである．

←― 3 個の事象の反復試行

(i) のとき　$\dfrac{5!}{3!1!1!}(2z)^3\cdot 2z\cdot z=320z^5$

(ii) のとき　(i) と同じく $320z^5$

(iii) のとき　$\dfrac{5!}{1!1!3!}2z\cdot 2z\cdot (z)^3=80z^5$

(iv) のとき　$\dfrac{5!}{2!2!1!}(2z)^2\cdot (2z)^2\cdot z=480z^5$

(v) のとき　$\dfrac{5!}{2!1!2!}(2z)^2\cdot 2z\cdot z^2=240z^5$

(vi) のとき　(v) と同じく $240z^5$

(i)〜(vi) は互いに排反であるから，求める確率は

$$(320+320+80+480+240+240)z^5$$
$$=1680z^5=\boldsymbol{\frac{336}{625}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

- ボタンを 5 回押すとき，「文字 X が少なくとも 1 回表示される」という事象を X とする．事象 Y，Z も同様に定義する．求める確率は

$$\begin{aligned} &P(X\cap Y\cap Z) \\ =&1-P(\overline{X\cap Y\cap Z}) \\ =&1-P(\overline{X}\cup\overline{Y}\cup\overline{Z}) \\ =&1-\big\{P(\overline{X})+P(\overline{Y})+P(\overline{Z}) \\ &\quad -P(\overline{X}\cap\overline{Y})-P(\overline{Y}\cap\overline{Z})-P(\overline{Z}\cap\overline{X}) \\ &\quad +P(\overline{X}\cap\overline{Y}\cap\overline{Z})\big\} \end{aligned}$$

←― 余事象の確率

←― ド・モルガンの法則

←― 3 個の事象の加法定理

ここで，

$$P(\overline{X})=P(\overline{Y})=\left(1-\frac{2}{5}\right)^5=\left(\frac{3}{5}\right)^5,$$
$$P(\overline{Z})=\left(1-\frac{1}{5}\right)^5=\left(\frac{4}{5}\right)^5$$

$\overline{X}\cap\overline{Y}$ は Z が 5 回表示されるという事象，$\overline{Y}\cap\overline{Z}$ は X が 5 回

表示されるという事象，$\overline{Z}\cap\overline{X}$ はYが5回表示されるという事象であるから，

$$P(\overline{X}\cap\overline{Y})=\left(\frac{1}{5}\right)^5,$$

$$P(\overline{Y}\cap\overline{Z})=P(\overline{Z}\cap\overline{X})=\left(\frac{2}{5}\right)^5$$

$\overline{X}\cap\overline{Y}\cap\overline{Z}$ という事象は起こり得ないから

$$P(\overline{X}\cap\overline{Y}\cap\overline{Z})=0$$

である．求める確率は

$$\begin{aligned}&P(X\cap Y\cap Z)\\ =&1-\left\{2\times\left(\frac{3}{5}\right)^5+\left(\frac{4}{5}\right)^5-\left(\frac{1}{5}\right)^5-2\times\left(\frac{2}{5}\right)^5+0\right\}\\ =&1-\frac{486+1204-1-64}{5^5}\\ =&1-\frac{1445}{5^5}=1-\frac{289}{625}\\ =&\frac{336}{625}\end{aligned}$$

$\longleftarrow$ $\overline{X}\cap\overline{Y}\cap\overline{Z}$ はX，Y，Zのどの文字も表示されないという事象である．