15 枚のカードがある．このうち 12 枚には 1，2 枚には 5，1 枚には 11 と，それぞれ表に印刷されている．このカードを裏返してよく混ぜた後に 1 枚ずつ順に 5 枚を取り出し，取り出したカードの表に印刷された 5 個の数字の合計を X とおく．また，残りの 10 枚に印刷された数字の合計を 2 で割った値を Y とおく．

(1) 最初に取り出した 1 枚のカードの数字の期待値は $\dfrac{\boxed{(11)}\boxed{(12)}}{\boxed{(13)}}$ である．

(2) $X<6$ となる確率は $\dfrac{\boxed{(14)}\boxed{(15)}}{\boxed{(16)}\boxed{(17)}}$ である．

(3) $X<Y$ となる確率は $\dfrac{\boxed{(18)}\boxed{(19)}}{\boxed{(20)}\boxed{(21)}}$ である．

(4) X の期待値と Y の期待値はともに $\boxed{(22)}\boxed{(23)}$ に等しい．

(13 慶應大 経済 2)

【答】

(11)(12)	(13)	(14)(15)	(16)(17)	(18)(19)	(20)(21)	(22)(23)
11	5	24	91	54	91	11

【解答】

(1) 最初に取り出す 1 枚のカードの数字は 1, 5, 11 のいずれかであり，それぞれを取り出す確率は順に $\dfrac{12}{15}$, $\dfrac{2}{15}$, $\dfrac{1}{15}$ であるから，求める期待値は

$$1\cdot\frac{12}{15}+5\cdot\frac{2}{15}+11\cdot\frac{1}{15}=\frac{33}{15}=\mathbf{\frac{11}{5}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $X<6$ となるのは，1 を 5 個取り出すときだから，求める確率は

$$\frac{12}{15}\cdot\frac{11}{14}\cdot\frac{10}{13}\cdot\frac{9}{12}\cdot\frac{8}{11}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{15\cdot 14\cdot 13}=\mathbf{\frac{24}{91}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) $Y=\dfrac{1\times 12+5\times 2+11\times 1-X}{2}=\dfrac{33-X}{2}$ だから

$$X<Y \iff X<\frac{33-X}{2}$$

$$\therefore \quad X<11$$

これを満たすのは「1 を 5 個」((2) のとき) または「1 を 4 個と 5 を 1 個」取り出すときである．求める確率は

$$\begin{aligned}
&\frac{24}{91}+{}_5\mathrm{C}_4\times\frac{12}{15}\cdot\frac{11}{14}\cdot\frac{10}{13}\cdot\frac{9}{12}\cdot\frac{2}{11}\\
&=\frac{24}{91}+5\times\frac{10\cdot 9\cdot 2}{15\cdot 14\cdot 13}\\
&=\frac{24}{7\cdot 13}+\frac{30}{7\cdot 13}\\
&=\mathbf{\frac{54}{91}} \qquad \cdots\cdots(答)
\end{aligned}$$

である．

(4) $Y=\dfrac{33-X}{2}$ より $2Y=33-X$ であり，期待値の定理

$$E(aX+b)=aE(X)+b\ (a,\ b\ は定数)$$

を用いると

$$2E(Y)=33-E(X)$$

問題文に $E(X)=E(Y)$ と書いてあるので

$$2E(X)=33-E(X)$$

$$\therefore\quad E(X)=E(Y)=\mathbf{11}$$ ……(答)

である．

- $Y=\dfrac{33-X}{2}$ より $X+2Y=33$ と変形したときは，期待値の定理

  $$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)\ (a,\ b\ は定数)$$

  を用いる．

  $$E(X+2Y)=33$$

  $$\therefore\quad E(X)+2E(Y)=33$$

  問題文に $E(X)=E(Y)$ と書いてあるので

  $$3E(X)=33\qquad\therefore\quad E(X)=11$$

  である．

- X の期待値を直接求めてみよう．X のとり得る値は

  $$5,\ 9,\ 13,\ 15,\ 19,\ 23$$

  である．

  $X=5$ のとき，$\dfrac{24}{91}$ $(\because\ (2))$

  $X=9$ のとき，$\dfrac{30}{91}$ $(\because\ (3)$ の第 2 項$)$

  $X=13$ のとき，${}_5\mathrm{C}_3\times\dfrac{12}{15}\cdot\dfrac{11}{14}\cdot\dfrac{10}{13}\cdot\dfrac{2}{12}\cdot\dfrac{1}{11}=\dfrac{20}{3\cdot 91}$

  $X=15$ のとき，$5\times\dfrac{12}{15}\cdot\dfrac{11}{14}\cdot\dfrac{10}{13}\cdot\dfrac{9}{12}\cdot\dfrac{1}{11}=\dfrac{15}{91}$

  $X=19$ のとき．$\dfrac{5!}{3!1!1!}\times\dfrac{12}{15}\cdot\dfrac{11}{14}\cdot\dfrac{10}{13}\cdot\dfrac{1}{12}\cdot\dfrac{1}{11}=\dfrac{40}{3\cdot 91}$

  $X=23$ のとき，$\dfrac{5!}{2!2!1!}\times\dfrac{12}{15}\cdot\dfrac{11}{14}\cdot\dfrac{2}{13}\cdot\dfrac{1}{12}\cdot\dfrac{1}{11}=\dfrac{2}{91}$

  より

  $$\begin{aligned}E(X)&=5\cdot\frac{24}{91}+9\cdot\frac{30}{91}+13\cdot\frac{20}{3\cdot 91}+15\cdot\frac{15}{91}+19\cdot\frac{40}{3\cdot 91}+23\cdot\frac{2}{91}\\&=\frac{661}{91}+\frac{1020}{3\cdot 91}=\frac{1001}{91}=11\end{aligned}$$

  である．

- (1) より 1 枚のカードの数字の期待値は $\dfrac{11}{5}$ であり，X は 5 枚のカードの数字の合計であるから

  $$E(X)=5\times\frac{11}{5}=11$$

  である．