正の実数 x, y, z が

$$\frac{yz}{x} = \frac{zx}{4y} = \frac{xy}{9z}$$

を満たすとする．このとき，式 $\dfrac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ の値を求めなさい．

(14 福島大 人文社会 1(3))

【答】 $\dfrac{11}{7}$

【解答】

$\dfrac{yz}{x} = \dfrac{zx}{4y} = \dfrac{xy}{9z} = k\ (>0)$ とおくと

$$\begin{cases} yz = kx & \cdots\cdots ① \\ zx = 4ky & \cdots\cdots ② \\ xy = 9kz & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①，②，③ を辺々かけあわせて

$$x^2y^2z^2 = 36k^3xyz$$

$xyz \fallingdotseq 0$ より

$$xyz = 36k^3 \qquad \cdots\cdots ④$$

①，④より yz を消去すると

$$x \cdot kx = 36k^3 \qquad \therefore \quad x = 6k \quad (\because\ x>0,\ k>0)$$

②，④より zx を消去すると

$$y \cdot 4ky = 36k^3 \qquad \therefore \quad y = 3k \quad (\because\ y>0,\ k>0)$$

③，④より xy を消去すると

$$z \cdot 9kz = 36k^3 \qquad \therefore \quad z = 2k \quad (\because\ z>0,\ k>0)$$

よって

$$\frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{6k+3k+2k}{\sqrt{(6k)^2+(3k)^2+(2k)^2}} = \frac{11k}{\sqrt{49k^2}} = \boldsymbol{\frac{11}{7}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．