a を実数の定数として，次のような x の 2 次方程式を考える．

$$x^2-5x+8=a(x-1)$$

(1) $1 \leqq a \leqq 2$ でこの方程式が実数解をもつとき，その解の値の範囲を求めよ．

(2) $2 \leqq x \leqq 4$ において，異なる 2 つの実数解をもつような a の値の範囲を求めよ．

(14 青森公立大 2)

【答】

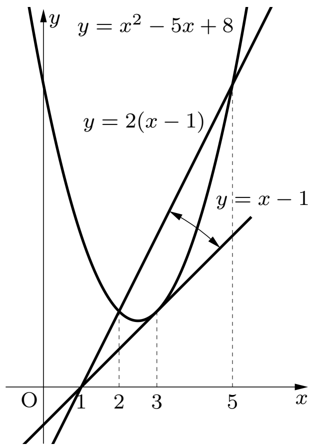
(1) $2 \leqq x \leqq 5$

(2) $1 < a \leqq \dfrac{4}{3}$

【解答】

$$x^2-5x+8=a(x-1) \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) 方程式 ① の実数解は放物線 $y=x^2-5x+8$ と点 $(1,\ 0)$ を通り傾き a の直線 $y=a(x-1)$ の共有点の x 座標である．



$a=1$ のとき

$$① \iff x^2-5x+8=x-1$$
$$x^2-6x+9=0$$
$$(x-3)^2=0$$
$$\therefore \quad x=3 \text{ (重解)}$$

$a=2$ のとき

$$① \iff x^2-5x+8=2(x-1)$$
$$x^2-7x+10=0$$
$$(x-2)(x-5)=0$$
$$\therefore \quad x=2,\ 5$$

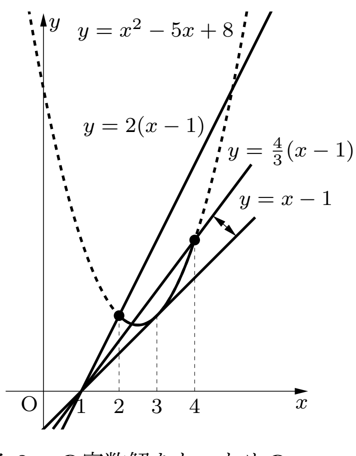
であるから，右図を得る．

よって，$1 \leqq a \leqq 2$ で方程式 ① はつねに実数解をもち，その解の値の範囲は

$$\boldsymbol{2 \leqq x \leqq 5} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) 放物線の一部 $y=x^2-5x+8$ $(2 \leqq x \leqq 4)$ と直線 $y=a(x-1)$ が共有点をもつときを調べる．



x 座標が 4 となる共有点が存在するときの a の値は

$$4^2-5\cdot4+8=a(4-1)$$
$$4=3a$$
$$\therefore \quad a=\frac{4}{3}$$

であり，(1) のグラフとあわせると右図を得る．

よって，$2 \leqq x \leqq 4$ において，異なる 2 つの実数解をもつような a の値の範囲は

$$\boldsymbol{1 < a \leqq \frac{4}{3}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- $x^2-(a+5)x+a+8=0$ が $2 \leqq x \leqq 4$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつための a の値の範囲として解くこともできるが，定数 a が分離された式の形をいかしたい．