a, b を正の実数とするとき，不等式

$$a^3+b^3 \geqq a^2b+ab^2$$

が成り立つことを示しなさい．

(14 福島大 人文社会 1(1))

【答】 略

【解答】

(左辺) $-$ (右辺) $\geqq 0$ を示す．

$$\begin{aligned} a^3+b^3-(a^2b+ab^2) &= a^2(a-b)-b^2(a-b) \\ &= (a-b)(a^2-b^2) \\ &= (a-b)^2(a+b) \\ &\geqq 0 \quad (\because\ a+b>0) \end{aligned}$$

等号は，$a=b$ のとき成り立つ．　　　　…… (証明終わり)

- a について整理すると

$$\begin{array}{c|cccc} b & 1 & -b & -b^2 & b^3 \\ & & b & 0 & -b^3 \\ \hline & 1 & 0 & -b^2 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{aligned} a^3+b^3-(a^2b+ab^2) &= a^3-ba^2-b^2a+b^3 \\ &= (a-b)(a^2-b^2) \\ &= (a-b)^2(a+b) \end{aligned}$$

となる．以下，解答と同じ．

- $b>0$ より

$$\begin{aligned} a^3+b^3 \geqq a^2b+ab^2 &\iff \left(\frac{a}{b}\right)^3+1 \geqq \left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a}{b} \\ &\iff \left(\frac{a}{b}\right)^3-\left(\frac{a}{b}\right)^2-\frac{a}{b}+1 \geqq 0 \qquad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

であり，① を示すためには，$t=\dfrac{a}{b}$ とおき

$$f(t)=t^3-t^2-t+1$$

が $t>0$ において $f(t) \geqq 0$ であることを示せばよい．

$$\begin{aligned} f'(t) &= 3t^2-2t-1 \\ &= (3t+1)(t-1) \end{aligned}$$

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

$f(t) \geqq f(1)=0$ であり，$t>0$ において $f(t) \geqq 0$ は成り立つ．

等号成立は $t=1$ すなわち $a=b$ のときである．