次の 2 つの放物線

$$y=-\frac{3}{16}x^2+\frac{5}{4}x+6 \qquad ①$$

および

$$y=\frac{x^2}{8}-4 \qquad ②$$

を考える．放物線 ① と y 軸との交点を A，放物線 ② と y 軸との交点を C とする．放物線 ① と放物線 ② の異なる 2 つの交点を，x 座標の値の小さいほうから順に B，D とする．

(1) 2 点 B，D を通る直線の方程式を求めよ．

(2) $-4<x<8$ の範囲で，放物線 ① 上あるいは放物線 ② 上にとった任意の点を E とする．三角形 BDE の面積が最大になるような，点 E の座標を求めよ．

(3) この点 A，B，C，D について，次の命題の真偽を調べよ．

「四角形 ABCD に内接する円は存在しない」

(14 青森公立大 4)

【答】

(1) $y=\frac{1}{2}x$

(2) $\left(2,\ \frac{31}{4}\right)$

(3) 真，証明は略

【解答】

$$y=-\frac{3}{16}x^2+\frac{5}{4}x+6 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$y=\frac{x^2}{8}-4 \qquad \cdots\cdots ②$$

(1) ① と ② の異なる 2 つの交点の x 座標は

$$-\frac{3}{16}x^2+\frac{5}{4}x+6=\frac{x^2}{8}-4$$

$$\frac{5}{16}x^2-\frac{5}{4}x-10=0$$

$$x^2-4x-32=0$$

$$(x+4)(x-8)=0$$

$$\therefore\quad x=-4,\ 8$$

x 座標の値の小さいほうから順に B，D であるから，それぞれの座標は

$$\mathrm{B}(-4,\ -2),\ \mathrm{D}(8,\ 4)$$

である．よって，2 点 B，D を通る直線の方程式は

$$y=\frac{4+2}{8+4}(x+4)-2$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{y=\frac{1}{2}x} \qquad \cdots\cdots(答)$$

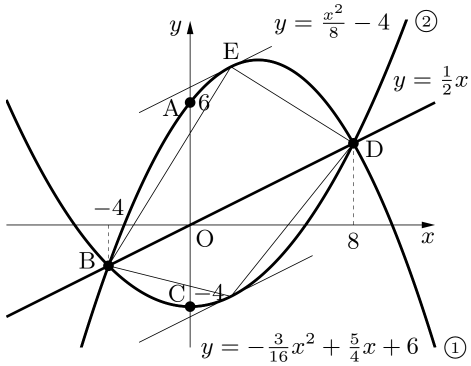
である．

- ①，②は 2 交点 B，C をもつことが保証されているから，直線 BC の方程式は ①，② を連立し，① $\times\ \frac{2}{3}+$ ② を辺々計算し

$$\frac{2}{3}y+y=\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{16}x^2+\frac{5}{4}x+6\right)+\left(\frac{x^2}{8}-4\right)$$

$$\frac{5}{3}y=\frac{5}{6}x \qquad \therefore\quad y=\frac{1}{2}x$$

(2) $\triangle$BDE の面積が最大となる点 E は，放物線①あるいは②上の点における接線が直線 BD と平行になる 2 つの接点のうち，接点と直線 BD との距離が大きい方の点である．



放物線 ① 上の点で接線の傾きが $\dfrac{1}{2}$ となる点の x 座標は，$\left(-\dfrac{3}{16}x^2 + \dfrac{5}{4}x + 6\right)' = -\dfrac{3}{8}x + \dfrac{5}{4}$ より

$$-\frac{3}{8}x + \frac{5}{4} = \frac{1}{2} \qquad \therefore \quad x = 2$$

であり，接点の y 座標は

$$y = -\frac{3}{16} \cdot 4 + \frac{5}{4} \cdot 2 + 6 = \frac{31}{4}$$

である．点 $\left(2,\ \dfrac{31}{4}\right)$ における接線の方程式は

$$y = \frac{1}{2}(x-2) + \frac{31}{4} \qquad \therefore \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{27}{4}$$

である．

放物線 ② 上の点で接線の傾きが $\dfrac{1}{2}$ となる点の x 座標は，$\left(\dfrac{x^2}{8} - 4\right)' = \dfrac{x}{4}$ より

$$\frac{x}{4} = \frac{1}{2} \qquad \therefore \quad x = 2$$

であり，接点の y 座標は

$$y = \frac{2^2}{8} - 4 = -\frac{7}{2}$$

である．点 $\left(2,\ -\dfrac{7}{2}\right)$ における接線の方程式は

$$y = \frac{1}{2}(x-2) - \frac{7}{2} \qquad \therefore \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$$

である．①, ② の接点と直線 BD の距離はそれぞれの接線の y 切片から直線 BD に下した垂線の長さに等しく，その大小は y 切片と原点との距離の大小と一致する．$\dfrac{27}{4} > \left|-\dfrac{9}{2}\right|$ であるから，$\triangle$BDE の面積が最大となる点 E の座標は

$$\mathrm{E}\left(\mathbf{2},\ \mathbf{\frac{31}{4}}\right) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- ①，②と $y = \dfrac{1}{2}x + k$ を連立して，重解条件から k の値，接点の座標を求めてもよい．

(3) 「四角形 ABCD に内接する円は存在しない」ことを背理法で示す．

「四角形 ABCD に内接する円は存在する」と仮定すると

$$\mathrm{AB} + \mathrm{CD} = \mathrm{BC} + \mathrm{DA} \qquad \cdots\cdots\ (*)$$

が成り立つ．A$(0,\ 6)$，B$(-4,\ -2)$，C$(0,\ -4)$，D$(8,\ 4)$ であり

$$\mathrm{AB}^2 = 4^2 + 8^2 = 80$$
$$\mathrm{CD}^2 = 8^2 + 8^2 = 128$$
$$\mathrm{BC}^2 = 4^2 + 2^2 = 20$$
$$\mathrm{DA}^2 = 8^2 + 2^2 = 68$$

である．$\mathrm{AB}+\mathrm{CD} = \sqrt{80}+\sqrt{128}$，$\mathrm{BC}+\mathrm{DA} = \sqrt{20}+\sqrt{68}$，すなわち $\mathrm{AB}+\mathrm{CD} > \mathrm{BC}+\mathrm{DA}$ であるから，$(*)$ は成り立たない．よって

与えられた命題は真

であり,「四角形 ABCD に内接する円は存在しない」ことが示された．　　…… (証明終わり)