N は十進法で表された 4桁(けた)の自然数であり，千の位の数が a，百の位の数が b，十の位の数が c, そして一の位の数が d である．次の各問に答えよ．

(1) $a-b+c-d$ が 11 の倍数ならば，N は 11 の倍数であることを示せ．
(2) N が 11 の倍数ならば，N^5-N は 55 の倍数であることを示せ．

(14 茨城大 後 教育 1)

【答】

(1) 略
(2) 略

【解答】

(1) 4 桁の自然数 N は $N=a\cdot 10^3+b\cdot 10^2+c\cdot 10+d$ であり

$$\begin{aligned} N &= a(11-1)^3+b(11-1)^2+c(11-1)+d \\ &= (11^3-3\cdot 11^2+3\cdot 11)a-a+(11^2-2\cdot 11)b+b+11c-c+d \\ &= 11M-(a-b+c-d) \quad (M \text{ は整数}) \end{aligned}$$

と変形できるから，$a-b+c-d$ が 11 の倍数ならば，N は 11 の倍数である．

…… (証明終わり)

- 11 を法とする合同式を用いると簡潔に表すことができる．
  $11\equiv -1$ であることと，条件 $a-b+c-d\equiv 0$ を用いると

$$\begin{aligned} N &= a\cdot 10^3+b\cdot 10^2+c\cdot 10+d \\ &\equiv a(-1)^3+b(-1)^2+c(-1)+d \\ &= -(a-b+c-d) \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

  よって，N は 11 の倍数である．
- $a-b+c-d$ が 11 の倍数であることは，N は 11 の倍数であることの必要十分条件でもある．

(2) N が 11 の倍数のとき，$N^5-N=N(N^4-1)$ は 11 の倍数だから，N^5-N が 55 の倍数であることを示すには，5 の倍数であることを示せばよい．

$$N^5-N=N(N-1)(N+1)(N^2+1)$$

連続した 5 整数の積が現れるように式を変形する．

$$\begin{aligned} N^5-N &= N(N-1)(N+1)\{(N^2-4)+5\} \\ &= (N-2)(N-1)N(N+1)(N+2)+5(N-1)N(N+1) \end{aligned}$$

1 項目は連続する 5 整数の積であり，5 つの因数のいずれか 1 つは 5 の倍数である．また，2 項目の $5(N-1)N(N+1)$ は 5 の倍数である．

したがって，N^5-N は 5 の倍数であり，55 の倍数である．

…… (証明終わり)

- N を 5 で割った余りで場合分けして，N^5-N が 5 の倍数であることを示してもよい．

$$N^5-N=N(N-1)(N+1)(N^2+1)$$

  n を整数として

(i) $N=5n$ のとき

N が 5 の倍数であるから，N^5-N は 5 の倍数である．

(ii) $N=5n+1$ のとき

$$N-1=(5n+1)-1=5n$$

$N-1$ が 5 の倍数であるから，N^5-N は 5 の倍数である．

(iii) $N=5n+2$ のとき

$$N^2+1=(5n+2)^2+1=25n^2+20n+5=5(5n^2+4n+1)$$

N^2+1 が 5 の倍数であるから，N^5-N は 5 の倍数である．

(iv) $N=5n+3$ のとき

$$N^2+1=(5n+3)^2+1=25n^2+30n+10=5(5n^2+5n+2)$$

N^2+1 が 5 の倍数であるから，N^5-N は 5 の倍数である．

(v) $N=5n+4$ のとき

$$N+1=(5n+4)+1=5(n+1)$$

$N+1$ が 5 の倍数であるから，N^5-N は 5 の倍数である．

以上 (i)〜(v) より，N^5-N は 5 の倍数である．

- 5 を法とする合同式を用いると簡潔に表すことができる．

(i) $n\equiv 0$ のとき

$$N^5-N\equiv 0^5-0=0$$

(ii) $n\equiv \pm1$ のとき

$$N^5-N\equiv(\pm1)^5-(\pm1)=\pm(1-1)=0 \quad (\because\ \text{以上，複号同順})$$

(iii) $n\equiv \pm2$ のとき

$$N^5-N\equiv(\pm2)^5-(\pm2)=\pm(32-2)=\pm30\equiv 0 \quad (\because\ \text{以上，複号同順})$$

以上 (i)〜(iii) より，N^5-N は 5 の倍数である．