数列 $\{a_n\}$ に対してつぎのように定められる数列 $\{b_n\}$ を $\{a_n\}$ の階差数列という．

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$\{b_n\}$ の階差数列を $\{c_n\}$ とし，$\{c_n\}$ の階差数列を $\{d_n\}$ としよう．いま

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 2, \quad c_1 = 4$$

であり，d_n はすべて 8 に等しいとする．このとき

$$a_5 = \boxed{(101)}\boxed{(102)}, \quad a_6 = \boxed{(103)}\boxed{(104)}\boxed{(105)}, \quad a_7 = \boxed{(106)}\boxed{(107)}\boxed{(108)}$$

であり，一般に

$$a_n = \frac{1}{3}\left(\boxed{(109)}\boxed{(110)}n^3 - \boxed{(111)}\boxed{(112)}n^2 + \boxed{(113)}\boxed{(114)}n - \boxed{(115)}\boxed{(116)}\right)$$
$$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

(14 慶應大 環境情報 5A)

【答】

(101)(102)	(103)(104)(105)	(106)(107)(108)	(109)(110)	(111)(112)	(113)(114)
65	131	233	04	18	32

(115)(116)
15

【解答】

d_n はすべて 8 に等しく

$$c_{n+1} = c_n + d_n, \quad c_1 = 4$$
$$b_{n+1} = b_n + c_n, \quad b_1 = 2$$
$$a_{n+1} = a_n + b_n, \quad a_1 = 1$$

であるから

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
d_n: & & 8 & & 8 & & 8 & & 8 & \cdots \\
c_n: & 4 & & 12 & & 20 & & 28 & & 36 & \cdots \\
b_n: & 2 & & 6 & & 18 & & 38 & & 66 & & 102 & \cdots \\
a_n: & 1 & & 3 & & 9 & & 27 & & 65 & & 131 & & 233 & \cdots
\end{array}$$

となり

$$\boldsymbol{a_5 = 65, \quad a_6 = 131, \quad a_7 = 233} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．一般項は順に

$n \geqq 2$ のとき

$$c_n = c_1 + \sum_{k=1}^{n-1} d_k = 4 + \sum_{k=1}^{n-1} 8 = 4 + 8(n-1) = 4(2n-1)$$

これは $n = 1$ のときも成り立つ．

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 4(2k-1) \\ &= 2 + 4 \cdot \frac{(n-1)\{1+(2n-3)\}}{2} \\ &= 2 + 4(n-1)^2 \end{aligned}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ.

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \{2 + 4(k-1)^2\} \\ &= 1 + 2(n-1) + 4\{0^2 + 1^2 + \cdots (n-2)^2\} \\ &= 2n - 1 + 4 \cdot \frac{1}{6}(n-2)(n-1)(2n-3) \\ &= \frac{1}{3}\{3(2n-1) + 2(2n^3 - 9n^2 + 13n - 6)\} \\ &= \frac{1}{3}(4n^3 - 18n^2 + 32n - 15) \end{aligned}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ.

$$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = \frac{1}{3}(4n^3 - 18n^2 + 32n - 15)} \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である.