$x \geqq 0$ で定義される関数 $f(x) = xe^{\frac{x}{2}}$ について次の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) $f(x)$ の第 1 次導関数を $f'(x)$，第 2 次導関数を $f''(x)$ とする．$f'(2)$，$f''(2)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ の逆関数を $g(x)$，$g(x)$ の第 1 次導関数を $g'(x)$，第 2 次導関数を $g''(x)$ とする．$g'(2e)$，$g''(2e)$ を求めよ．

(14 名古屋市大 医 4)

【答】

(1) $f'(2) = 2e$，$f''(2) = \dfrac{3}{2}e$

(2) $g'(2e) = \dfrac{1}{2e}$，$g''(2e) = -\dfrac{3}{16e^2}$

【解答】

$$f(x) = xe^{\frac{x}{2}} \ (x \geqq 0)$$

(1) 積の微分法を用いると

$$f'(x) = 1 \cdot e^{\frac{x}{2}} + x \cdot \left(e^{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{x+2}{2}e^{\frac{x}{2}}$$
$$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x}{2}} + \frac{x+2}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{x+4}{4}e^{\frac{x}{2}}$$

となる．$x = 2$ を代入すると

$$\boldsymbol{f'(2) = 2e, \quad f''(2) = \frac{3}{2}e} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $g(x)$ は $f(x)$ の逆関数であるから

$$y = g(x) \iff x = f(y)$$

であり，$\dfrac{dx}{dy} = f'(y)$ である．よって

$$g'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{f'(y)} \qquad \cdots\cdots ①$$

$$g''(x) = \frac{d}{dx}g'(x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{f'(y)} = \left(\frac{d}{dy}\frac{1}{f'(y)}\right) \cdot \frac{dy}{dx} \quad (\because \text{ 合成関数の微分})$$
$$= \frac{-f''(y)}{\{f'(y)\}^2} \cdot \frac{1}{f'(y)} \quad (\because \text{ 商の微分，①})$$
$$= -\frac{f''(y)}{\{f'(y)\}^3} \qquad \cdots\cdots ②$$

$f(2) = 2e \iff g(2e) = 2$ なので，①，② に $x = 2e$ を代入すると

$$\boldsymbol{g'(2e)} = \frac{1}{f'(2)} = \boldsymbol{\frac{1}{2e}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$\boldsymbol{g''(2e)} = -\frac{f''(2)}{\{f'(2)\}^3} = -\frac{\frac{3}{2}e}{(2e)^3} = \boldsymbol{-\frac{3}{16e^2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- $g(x)$ は $f(x)$ の逆関数なので

$$g(f(x)) = x$$

が成り立つ．合成関数の微分法により

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

$$\therefore \quad g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \qquad \cdots\cdots \text{㋐}$$

さらに，辺々を x で微分すると

$$g''(f(x)) \cdot f'(x) = -\frac{f''(x)}{\{f'(x)\}^2} \quad (\because \text{ 左辺は合成関数の微分，右辺は商の微分})$$

$$\therefore \quad g''(f(x)) = -\frac{f''(x)}{\{f'(x)\}^3} \qquad \cdots\cdots \text{㋑}$$

$f(2) = 2e$ より，㋐に $x = 2$ を代入すると，(1) の結果より

$$g'(2e) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{2e}$$

である．㋑に $x = 2$ を代入すると，(1) の結果より

$$g''(2e) = -\frac{f''(2)}{\{f'(2)\}^3} = -\frac{\frac{3}{2}e}{(2e)^3} = -\frac{3}{16e^2}$$

である．