以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)=|x|$ が $x=0$ において微分可能でないことを微分の定義に基づいて示せ．

(2) $y=x|x|$ のグラフの概形を描け．

(3) m は自然数とする．関数 $g(x)=x^m|x|$ が $x=0$ において微分可能であるか微分可能でないかを理由をつけて答えよ．

(14 大阪府大 中 工 4)

【答】

(1) 略

(2) 略

(3) $g(x)$ は微分可能である．

【解答】

(1)
$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & (x \geqq 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$$

であるから，$f(x)=|x|$ について

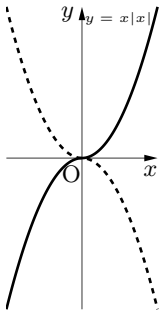
$$\lim_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to+0}\frac{x-0}{x-0}=1$$
$$\lim_{x\to-0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{(-x)-0}{x-0}=-1$$

となり，これらの極限値は一致しないので，$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ は存在しない．

よって，$f(x)$ は $x=0$ において微分可能でない． ……(証明終わり)

(2)
$$y=x|x|=\begin{cases} x^2 & (x \geqq 0) \\ -x^2 & (x<0) \end{cases}$$

であり，グラフは右図の太線となる．



(3)
$$g(x)=x^m|x|=\begin{cases} x^{m+1} & (x \geqq 0) \\ -x^{m+1} & (x<0) \end{cases}$$

であるから，$g(x)=x^m|x|$ について

$$\lim_{x\to+0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to+0}\frac{x^{m+1}-0}{x-0}=\lim_{x\to+0}x^m=0$$
$$\lim_{x\to-0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to-0}\frac{(-x^{m+1})-0}{x-0}=\lim_{x\to-0}(-x^m)=0$$

となり，これらの極限値は一致するので，$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$ は存在する．

よって，$g(x)$ は $x=0$ において**微分可能である．** ……(答)