箱の中に金貨と銀貨が少なくとも 1 枚ずつ，合計 10 枚入っている．よくかき混ぜてから 1 枚だけを取り出し，硬貨の種類を確かめて箱に戻すまでを 1 回の試行とする．試行を 3 回繰り返したとき，少なくとも 1 回は銀貨が出る確率を p とする．一方，試行を 5 回繰り返したとき，少なくとも 2 回は銀貨が出る確率を q とする．

(1) 箱の中の金貨の枚数を 6 枚とする．p と q はどちらが大きいか．
(2) 箱の中の金貨の枚数を a 枚とする．$p < q$ となるような a の最大値を求めよ．

(14 青森公立大 3)

【答】

(1) $p > q$
(2) $a = 2$

【解答】

(1) 1 回の試行で金貨を取り出す確率は $\dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$ である．余事象を考えると

$$p = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^3 = 1 - \frac{3^3}{5^3}$$

$$q = 1 - \left\{\left(\frac{3}{5}\right)^5 + {}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{3}{5}\right)^4\left(\frac{2}{5}\right)\right\}$$

$$= 1 - \frac{3^5 + 5 \cdot 3^4 \cdot 2}{5^5} = 1 - \frac{13 \cdot 3^4}{5^5} = 1 - \frac{39}{25} \cdot \frac{3^3}{5^3}$$

である．$1 < \dfrac{39}{25}$ であるから，p，q の大小は

$$\boldsymbol{p > q} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) 1 回の試行で金貨を取り出す確率は $\dfrac{a}{10}$ $(a = 1,\ \cdots,\ 9)$ である．余事象を考えると

$$p = 1 - \left(\frac{a}{10}\right)^3$$

$$q = 1 - \left\{\left(\frac{a}{10}\right)^5 + {}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{a}{10}\right)^4\left(\frac{10-a}{10}\right)\right\}$$

$$= 1 - \frac{a^5 + 5(10a^4 - a^5)}{10^5}$$

$$= 1 - \frac{50a^4 - 4a^5}{10^5}$$

であるから

$$p < q \iff 1 - \left(\frac{a}{10}\right)^3 < 1 - \frac{50a^4 - 4a^5}{10^5}$$

$$\therefore \quad 10^2a^3 > 50a^4 - 4a^5$$

$$\therefore \quad 2a^2 - 25a + 50 > 0 \quad (\because\ 2a^3 > 0)$$

$$\therefore \quad (2a-5)(a-10) > 0$$

$$\therefore \quad a < \frac{5}{2} \text{ または } 10 < a$$

a は $1 \leqq a \leqq 9$ を満たす整数であるから

$$a = 1,\ 2$$

であり，a の最大値は　**2**　である．　　……(答)