

立方体の面を3色を用いて2つずつ同じ色に塗る。次の問に答えよ。

- (1) 向かい合う2面が、どの組についても同じ色で塗られる確率を求めよ。
- (2) 向かい合う2面が、どの組についても同じ色にならない確率を求めよ。
- (3) 向かい合う2面の組のうち、2面の色が同じになる組の個数の期待値を求めよ。

(14 早稲田大 基幹理工・創造理工・先進理工 3)

【答】

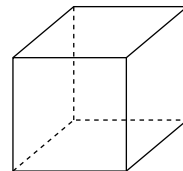
- (1) $\frac{1}{15}$
- (2) $\frac{8}{15}$
- (3) $\frac{3}{5}$

【解答】

立方体の6面を3つの色A, B, Cを用いて2つずつ同じ色に塗る塗り方は、Aを塗る2面の選び方が ${}_6C_2$ 通り、Bを塗る2面の選び方が ${}_4C_2$ 通りあり、残りの2面にはCを塗るから

$${}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot 1 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot 1 = 90 \text{ 通り}$$

ある。これらは同様に確からしい。



- (1) 立方体を固定し、各面を「上, 下, 前, 後, 左, 右」として区別する。ただし、組 {上下}, {前後}, {左右} は向かい合う2面の組である。

向かい合う2面が、どの組についても同じ色で塗られるのは、組 {上下}, {前後}, {左右} をそれぞれ1つの色で塗られるときである。3色を用いるから、塗り方は

$$3! \text{ 通り}$$

ある。求める確率は

$$\frac{3!}{90} = \frac{1}{15} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である。

- (2) 向かい合う2面が、どの組についても同じ色にならないのは、上面と同じ色となる側面の選び方が4通り、下面と同じ色となる側面は、向かい合う2面がどの組についても同じ色にならないことに注意すると、上面と同じ色となる側面の対面を除くから2通りある(下面と同じ色となる側面を上面と同じ色となる側面の対面にとると残り2面が同じ色となる。最後の2面は対面であり向かい合う2面が同じ色となるので条件を満たさない)。残り2つの側面の選び方は1通りに決まる。求める確率は

$$\frac{4 \cdot 2 \times 3!}{90} = \frac{8}{15} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である。

- (3) 向かい合う2面の組のうち、2面の色が同じになる組が2個となることはないから、色が同じになる組が1個となるのは(1)または(2)の余事象であり、この確率は

$$1 - \left(\frac{1}{15} + \frac{8}{15} \right) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

である。よって、求める期待値は

$$0 \cdot \frac{8}{15} + 1 \cdot \frac{2}{5} + 3 \cdot \frac{1}{15} = \frac{0+6+3}{15} = \frac{3}{5} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である。