$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = 1$ である二等辺三角形 ABC において，$\mathrm{BC} = 2x$, 内接円の半径を r とおく.

(i) r を x を用いて表せ.
(ii) r が最大となる x の値を求めよ (最大値そのものは求める必要はない).

(14 琉球大・理・工・医・教育 1(2))

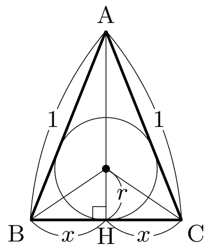
【答】

(i) $r = x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ $(0 < x < 1)$

(ii) $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

【解答】

(i) A から辺 BC に下ろした垂線の足を H とおくと，△ABC の面積 S は



$$S = \frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AH} = \frac{1}{2}\cdot 2x \cdot \sqrt{1^1 - x^2}$$
$$= x\sqrt{1-x^2} \qquad \cdots\cdots ①$$

である．一方，内接円の中心を I とおくと

$$\triangle\mathrm{ABC} = \triangle\mathrm{IBC} + \triangle\mathrm{ICA} + \triangle\mathrm{IAB}$$

だから，内接円の半径 r を用いて

$$S = \frac{1}{2}r(\mathrm{BC}+\mathrm{CA}+\mathrm{AB}) = \frac{1}{2}r(2x+1+1)$$
$$= r(x+1) \qquad \cdots\cdots ②$$

と表すこともできる．①, ② より

$$r(x+1) = x\sqrt{1-x^2}$$
$$\therefore\quad r = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{x+1} = \boldsymbol{x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\ (0 < x < 1)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である.

- $s = \dfrac{1}{2}(\mathrm{BC}+\mathrm{CA}+\mathrm{AB})$ とおくと，$s = \dfrac{1}{2}(2x+1+1) = x+1$ であり，ヘロンの公式により
$$S = \sqrt{s(s-2x)(s-1)(s-1)} = \sqrt{(x+1)(1-x)x\cdot x} = x\sqrt{1-x^2}$$
として，① を求めることもできる.

(ii) (i) の結果より

$$r^2 = \frac{x^2(1-x)}{1+x}\ (0 < x < 1)$$

であり，r が最大となる x の値は，r^2 が最大となる x の値と一致する.

$$f(x) = \frac{x^2(1-x)}{1+x}\ (0 < x < 1)$$

とおくと

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{-x^3+x^2}{x+1} = -x^2+2x-2+\frac{2}{x+1} \\
f'(x) &= -2x+2-\frac{2}{(x+1)^2} = \frac{-2(x-1)(x+1)^2-2}{(x+1)^2} \\
&= \frac{-2(x^3+x^2-x-1)-2}{(x+1)^2} = \frac{-2x(x^2+x-1)}{(x+1)^2} \\
&= \frac{-2x\left(x-\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)}{(x+1)^2}
\end{aligned}
$$

$f(x)$ の増減は下表となる．

x	(0)	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，$f(x)$ が最大となる x，すなわち，r が最大となる x は

$$\boldsymbol{x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．