$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\tan\theta=\dfrac{3}{4}$ ならば，$\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$ であり，

$\tan\dfrac{\theta}{4}=\sqrt{\boxed{クケ}}-\boxed{コ}$ である．

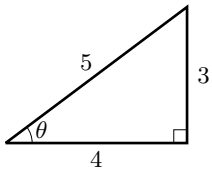
(14 明治大 理工 1(2))

【答】

カ	キ	クケ	コ
1	3	10	3

【解答】

$\tan\theta=\dfrac{3}{4}$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$ であるから



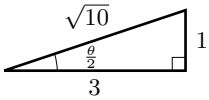
$$\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1-\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}}=\frac{1}{9}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{4}$ であり，$\tan\dfrac{\theta}{2}>0$ であるから

$$\tan\frac{\theta}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$ ……(答)

である．

このとき $\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ であるから



$$\tan^2\frac{\theta}{4}=\frac{1-\cos\frac{\theta}{2}}{1+\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{1-\frac{3}{\sqrt{10}}}{1+\frac{3}{\sqrt{10}}}=\frac{\sqrt{10}-3}{\sqrt{10}+3}$$
$$=19-6\sqrt{10}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $0<\dfrac{\theta}{4}<\dfrac{\pi}{8}$ であり，$\tan\dfrac{\theta}{4}>0$ であるから

$$\tan\frac{\theta}{4}=\sqrt{19-6\sqrt{10}}=\sqrt{19-2\sqrt{90}}=\boldsymbol{\sqrt{10}-3}$$ ……(答)

である．

- $\tan\theta=\dfrac{3}{4}$ において，$\tan\theta=\tan\left(2\cdot\dfrac{\theta}{2}\right)$ として，2 倍角の公式を用いると

$$\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{3}{4}$$

であり，式を整理すると

$$8\tan\frac{\theta}{2}=3\left(1-\tan^2\frac{\theta}{2}\right)$$
$$3\tan^2\frac{\theta}{2}+8\tan\frac{\theta}{2}-3=0$$
$$\left(3\tan\frac{\theta}{2}-1\right)\left(\tan\frac{\theta}{2}+3\right)=0$$
$$\therefore\quad \tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{3},\ -3 \qquad \cdots\cdots ㋐$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{4}$ であり，$\tan\dfrac{\theta}{2}>0$ であるから

$$\boldsymbol{\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{3}}$$ ……(答)

である．

○ $0 < \dfrac{\theta}{2} < \dfrac{\pi}{4}$ のとき，$0 < \tan\dfrac{\theta}{4} < 1$ であるが，$\tan\theta = \dfrac{3}{4}$ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を満たす θ の存在は保証されているので，$\tan\dfrac{\theta}{2}$ の正負が分かれば，㋐ より $\tan\dfrac{\theta}{2}$ の値は確定する．

さらに，$\tan\dfrac{\theta}{2} = \tan\left(2\cdot\dfrac{\theta}{4}\right)$ として，2 倍角の公式を用いると

$$\frac{2\tan\dfrac{\theta}{4}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{4}} = \frac{1}{3}$$

であり，式を整理すると

$$6\tan\frac{\theta}{4} = 1-\tan^2\frac{\theta}{4}$$

$$\tan^2\frac{\theta}{4} + 6\tan\frac{\theta}{4} - 1 = 0$$

$$\therefore\quad \tan\frac{\theta}{4} = -3\pm\sqrt{10}$$

$0 < \dfrac{\theta}{4} < \dfrac{\pi}{8}$ であり，$\tan\dfrac{\theta}{4} > 0$ であるから

$$\boldsymbol{\tan\frac{\theta}{4} = \sqrt{10}-3} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．