$a+b+c=0,\ a^2+b^2+c^2 \neq 0$ とする．次の各問に答えよ．

(1) $a=1,\ b=2$ のとき，ベクトル $\vec{p}=(a,\ b,\ c)$ とベクトル $\vec{q}=(b,\ c,\ a)$ のなす角 θ の余弦 $\cos\theta$ の値を求めよ．

(2) ベクトル $\vec{p}=(a,\ b,\ c)$ とベクトル $\vec{q}=(b,\ c,\ a)$ のなす角の大きさは $a,\ b,\ c$ によらず一定であることを示し，その値を求めよ．

(3) ベクトル $\vec{p}=(a,\ b,\ c)$ とベクトル $\vec{r}=(a-b,\ b-c,\ c-a)$ のなす角の大きさを求めよ．

(14 高知工科大 2)

【答】

(1) $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$

(2) 証明略，$\dfrac{2}{3}\pi$

(3) $\dfrac{\pi}{6}$

【解答】

(1) $a=1,\ b=2$ のとき，$a+b+c=0$ より $c=-(a+b)=-3$ であり

$$\vec{p}=(1,\ 2,\ -3),\quad \vec{q}=(2,\ -3,\ 1)$$

であるから

$$\cos\theta=\frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}=\frac{1\times2+2\times(-3)+(-3)\times1}{\sqrt{1+2^2+(-3)^2}\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}}$$
$$=\frac{-7}{\sqrt{14}\sqrt{14}}=\boldsymbol{-\frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $\vec{p}=(a,\ b,\ c)$ と $\vec{q}=(b,\ c,\ a)$ のなす角を $\alpha\ (0\leqq\alpha\leqq\pi)$ とおくと

$$\cos\alpha=\frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}=\frac{ab+bc+ca}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{b^2+c^2+a^2}}=\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$$

である．ここで $a+b+c=0$ の辺々を 2 乗すると

$$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=0$$
$$\therefore\quad a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca) \qquad \cdots\cdots ①$$

が得られるので

$$\cos\alpha=\frac{ab+bc+ca}{-2(ab+bc+ca)}=-\frac{1}{2}$$

よって，α は $a,\ b,\ c$ の値によらず一定であり，その値は

$$\alpha=\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) $\vec{p}=(a,\ b,\ c)$ と $\vec{r}=(a-b,\ b-c,\ c-a)$ のなす角を β $(0 \leqq \beta \leqq \pi)$ とおくと

$$\begin{aligned}
\cos\beta &= \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{|\vec{p}||\vec{r}|} = \frac{a(a-b)+b(b-c)+c(c-a)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}} \\
&= \frac{a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)}} \\
&= \frac{\frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}} \quad (\because\ ①) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \beta = \boldsymbol{\frac{\pi}{6}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である.