

実数 a, b, c, k が $5a - b - c = ka$, $-a + 5b - c = kb$, $-a - b + 5c = kc$, $abc \neq 0$ を満たしている. このとき, k の値を求めると $k = \boxed{\text{オ}}$ であり, $R = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ の値を求めると $R = \boxed{\text{カ}}$ である. (15 南山大 理工 1(3))

【答】	オ	カ
	3 または 6	8 または -1

【解答】

$$\begin{cases} 5a - b - c = ka & \cdots \textcircled{1} \\ -a + 5b - c = kb & \cdots \textcircled{2} \\ -a - b + 5c = kc & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

とおく. ①, ②, ③ の辺々を加えると

$$\begin{aligned} 3(a+b+c) &= k(a+b+c) \\ \therefore (k-3)(a+b+c) &= 0 \\ \therefore k=3 \text{ または } a+b+c=0 \end{aligned}$$

$a+b+c=0$ のとき, $-b-c=a$ であるから, ① を用いて b, c を消去すると

$$6a = ka$$

$abc \neq 0$ より $a \neq 0$ であり $k=6$

以上より, $k=3$ または 6 である. ……(答)

$k=3$ のとき, ①, ②, ③は

$$\begin{cases} b+c=2a \\ c+a=2b \\ a+b=2c \end{cases} \text{ となり } R = \frac{2c \cdot 2a \cdot 2b}{abc} = 8$$

$k=6$ のとき, ①, ②, ③は

$$\begin{cases} b+c=-a \\ c+a=-b \\ a+b=-c \end{cases} \text{ となり } R = \frac{(-c) \cdot (-a) \cdot (-b)}{abc} = -1$$

以上より, $R=8$ または -1 である. ……(答)