

$x + y + z \neq 0$  のとき、次の式の値を求めよ.

$$\frac{x + 2y}{z} = \frac{y + 2z}{x} = \frac{z + 2x}{y}$$

(15 青森公立大 1(3))

【答】 3

【解答】

$$\frac{x + 2y}{z} = \frac{y + 2z}{x} = \frac{z + 2x}{y} = k \quad \dots\dots \textcircled{1} \text{ とおく.}$$

$$\textcircled{1} \iff \begin{cases} x + 2y = kz & \dots\dots \textcircled{2} \\ y + 2z = kx & \dots\dots \textcircled{3} \\ z + 2x = ky & \dots\dots \textcircled{4} \\ x \neq 0 \text{ かつ } y \neq 0 \text{ かつ } z \neq 0 & \dots\dots \textcircled{5} \end{cases}$$

②, ③, ④ を加えると

$$\begin{aligned} (x + y + z) + 2(x + y + z) &= k(x + y + z) \\ \therefore (k - 3)(x + y + z) &= 0 \end{aligned}$$

$x + y + z \neq 0$  もあわせると

$$k = 3$$

であることが必要である.

$k = 3$  のとき,

$$(*) \begin{cases} x + y + z \neq 0 \\ x + 2y = 3z \\ y + 2z = 3x \\ z + 2x = 3y \\ x \neq 0 \text{ かつ } y \neq 0 \text{ かつ } z \neq 0 \end{cases}$$

を満たす  $x, y, z$  が存在することを確認する. ここで

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 2y = 3z \\ y + 2z = 3x \\ z + 2x = 3y \end{cases} &\iff \begin{cases} x = 3z - 2y \\ y + 2z = 3(3z - 2y) \\ z + 2(3z - 2y) = 3y \end{cases} &\iff \begin{cases} x = 3z - 2y \\ y = z \\ z = y \end{cases} \\ &\iff x = y = z \end{aligned}$$

であるから,  $x = y = z \neq 0$  を満たす  $x, y, z$  は (\*) を満たす (十分).

よって, 求める式の値は

3

……(答)

である.