$x(x-1)+y(y-1)=0$ は「$(x=0$ または $x=1)$ かつ $(y=0$ または $y=1)$」であるための $\boxed{\text{(xi)}}$

(a) 必要十分条件である
(b) 十分条件だが必要条件ではない
(c) 必要条件だが十分条件ではない
(d) 必要条件でも十分条件でもない

(15 北見工大 1(10))

【答】

(xi)
(c)

【解答】

$x(x-1)+y(y-1)=0 \ \underset{\circ}{\overset{\times}{\rightleftarrows}}$ 「$(x=0$ または $x=1)$ かつ $(y=0$ または $y=1)$」

$\longrightarrow$ の反例 : $x=\dfrac{1}{2}$ とすると

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)+y(y-1)=0$$
$$y^2-y-\frac{1}{4}=0$$
$$y=\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$$

$(x,\ y)=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1\pm\sqrt{2}}{2}\right)$ は条件 $x(x-1)+y(y-1)=0$ を満たすが，条件「$(x=0$ または $x=1)$ かつ $(y=0$ または $y=1)$」を満たさない．

$\longleftarrow$ の証明 : 条件「$(x=0$ または $x=1)$ かつ $(y=0$ または $y=1)$ …… $(*)$」を同値変形すると

$$\begin{aligned}(*) &\iff (x=0 \text{ かつ } (y=0 \text{ または } y=1) \text{ または } (x=1 \text{ かつ } (y=0 \text{ または } y=1)\\ &\iff (x=0 \text{ かつ } y=0) \text{ または } (x=0 \text{ かつ } y=1)\\ &\qquad\quad \text{または } (x=1 \text{ かつ } y=0) \text{ または } (x=1 \text{ かつ } y=1)\\ &\iff (x,\ y)=(0,\ 0),\ (0,\ 1),\ (1,\ 0),\ (1,\ 1)\end{aligned}$$

であり，4 つの $(x,\ y)$ はどれも条件 $x(x-1)+y(y-1)=0$ を満たす．

したがって，$x(x-1)+y(y-1)=0$ は「$(x=0$ または $x=1)$ かつ $(y=0$ または $y=1)$」であるための

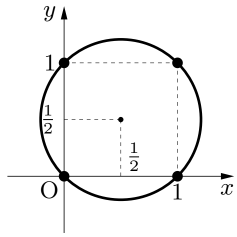
必要条件だが十分条件ではない　**(c)**　……(答)

- $$P=\{(x,\ y)\,|\,x(x-1)+y(y-1)=0\},$$
  $$Q=\{(x,\ y)\,|\,(x=0 \text{ または } x=1) \text{ かつ } (y=0 \text{ または } y=1)\}$$
  とおく．
  $$x(x-1)+y(y-1)=0 \iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

また

$$(x=0 \text{ または } x=1) \text{ かつ } (y=0 \text{ または } y=1)$$
$$\iff (x,\ y)=(0,\ 0),\ (0,\ 1),\ (1,\ 0),\ (1,\ 1) \qquad (【解答】参照)$$

であるから，xy 平面上に $P,\ Q$ を図示 (数学 II) すると，右図のように P は円，Q は 4 つの黒丸となる．



$P \not\subset Q$ であり，$P \supset Q$

である．したがって，$x(x-1)+y(y-1)=0$ は「$(x=0$ または $x=1)$ かつ $(y=0$ または $y=1)$」であるための

必要条件だが十分条件ではない．