$x,\ y,\ z$ を整数とする．

(1) $y \neq 0$ かつ $yz \neq -1$ のとき，$\left| y + \dfrac{1}{z} \right|$ の最小値を求めよ．

(2) $\dfrac{1}{x + \dfrac{1}{y + \dfrac{1}{z}}} = \dfrac{9}{11}$ を満たす $x,\ y,\ z$ の組をすべて求めよ．

(15 一橋大 後 経 1)

【答】

(1) $\dfrac{1}{2}$

(2) $(1,\ 4,\ 2),\ (1,\ 5,\ -2)$

【解答】

(1) 実数 $X,\ Y$ に対し，不等式

$$\big||X| - |Y|\big| \leqq |X + Y| \leqq |X| + |Y|$$

(左の等号は $XY \leqq 0$ のとき成立し，右の等号は $XY \geqq 0$ のとき成立する)

が成り立つ．

本問で左の不等式を用いると

$$\left| y + \frac{1}{z} \right| \geqq \left| |y| - \left| \frac{1}{z} \right| \right| \quad \left(\text{等号は } \frac{y}{z} \leqq 0 \text{ のとき成り立つ}\right)$$

$y,\ z$ はどちらも 0 でない整数であるから

$$|y| \geqq 1, \quad \left| \frac{1}{z} \right| \leqq 1 \qquad \therefore \quad |y| \geqq \left| \frac{1}{z} \right|$$

であり

$$\left| y + \frac{1}{z} \right| \geqq |y| - \left| \frac{1}{z} \right| = |y| - \frac{1}{|z|}$$

$$\left(\text{等号は } \frac{y}{z} < 0 \text{ すなわち } yz < 0 \text{ のとき成り立つ}\right)$$

$yz \neq -1$ であるから，$yz \leqq -2$ であり

$$|y| - \left| \frac{1}{z} \right| \geqq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

等号は $y = \pm 1$ かつ $z = \mp 1$ (複号同順) のとき成り立つ．

よって，$\left| y + \dfrac{1}{z} \right|$ は $(y,\ z) = (\pm 1,\ \mp 2)$（複号同順）のとき

最小値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ ……(答)

をとる．

(2) 与式を変形する．

$$\frac{1}{x + \dfrac{1}{y + \dfrac{1}{z}}} = \frac{9}{11} \iff x + \frac{1}{y + \dfrac{1}{z}} = \frac{11}{9} \qquad \cdots\cdots ①$$

$y = 0$ とすると

$$① \iff x + z = \frac{11}{9}$$

これは $x,\ z$ が整数であることに反する．したがって，$y \neq 0$ である．

また，① が定義されることから $y+\dfrac{1}{z} \neq 0$ であり，これより $yz \neq -1$ である．

$y,\ z$ は (1) の条件を満たすから

$$\left|y+\frac{1}{z}\right| \geqq \frac{1}{2} \iff \frac{1}{\left|y+\frac{1}{z}\right|} \leqq 2 \iff -2 \leqq \frac{1}{y+\frac{1}{z}} \leqq 2$$

①より

$$-2 \leqq \frac{11}{9}-x \leqq 2 \qquad \therefore \quad -\frac{7}{9} \leqq x \leqq \frac{29}{9}$$

x は整数であるから

$$x=0,\ 1,\ 2,\ 3$$

である．

(i) $x=0$ のとき

$$① \iff 0+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}=\frac{11}{9} \iff y+\frac{1}{z}=\frac{9}{11}$$

z は整数であるから，$\left|\dfrac{1}{z}\right| \leqq 1$ であり

$$\left|\frac{9}{11}-y\right| \leqq 1 \qquad \therefore \quad -1 \leqq \frac{9}{11}-y \leqq 1 \qquad \therefore \quad -\frac{2}{11} \leqq y \leqq \frac{20}{11}$$

y は整数であるから

$$y=0,\ 1$$

いずれの場合も z は整数ではないから不適．

(ii) $x=1$ のとき

$$① \iff 1+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}=\frac{11}{9} \iff y+\frac{1}{z}=\frac{9}{2}$$

z は整数であるから，$\left|\dfrac{1}{z}\right| \leqq 1$ であり

$$\left|\frac{9}{2}-y\right| \leqq 1 \qquad \therefore \quad -1 \leqq \frac{9}{2}-y \leqq 1 \qquad \therefore \quad \frac{7}{2} \leqq y \leqq \frac{11}{2}$$

y は整数であるから

$$y=4,\ 5$$

z が整数となるのは

$$(y,\ z)=(4,\ 2),\ (5,\ -2)$$

(iii) $x=2$ のとき

$$① \iff 2+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}=\frac{11}{9} \iff y+\frac{1}{z}=-\frac{9}{7}$$

z は整数であるから，$\left|\dfrac{1}{z}\right| \leqq 1$ であり

$$\left|-\frac{9}{7}-y\right| \leqq 1 \qquad \therefore \quad -1 \leqq -\frac{9}{7}-y \leqq 1 \qquad \therefore \quad \frac{-16}{7} \leqq y \leqq -\frac{2}{7}$$

y は整数であるから

$$y=-2,\ -1$$

いずれの場合も z は整数ではないから不適．

(iv) $x=3$ のとき

$$① \iff 3+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}=\frac{11}{9} \iff y+\frac{1}{z}=-\frac{9}{16}$$

z は整数であるから，$\left|\frac{1}{z}\right| \leqq 1$ であり

$$\left|-\frac{9}{16}-y\right| \leqq 1 \qquad \therefore \quad -1 \leqq -\frac{9}{16}-y \leqq 1 \qquad \therefore \quad -\frac{25}{16} \leqq y \leqq \frac{7}{17}$$

y は整数であるから

$$y=-1,\ 0$$

いずれの場合も z は整数ではないから不適.

以上 (i)〜(iv) より，整数 $x,\ y,\ z$ の組は

$$(x,\ y,\ z)=\mathbf{(1,\ 4,\ 2),\ (1,\ 5,\ -2)} \qquad \cdots\cdots(答)$$