n を 2 以上の整数とする．n 以下の正の整数のうち，n との最大公約数が 1 となるものの個数を $E(n)$ で表す．たとえば

$$E(2)=1,\ E(3)=2,\ E(4)=2,\ \cdots,\ E(10)=4,\ \cdots$$

である．

(1) $E(1024)$ を求めよ．

(2) $E(2015)$ を求めよ．

(3) m を正の整数とし，p と q を異なる素数とする．$n=p^m q^m$ のとき $\dfrac{E(n)}{n} \geqq \dfrac{1}{3}$ が成り立つことを示せ．

(15 一橋大 1)

【答】

(1) 512

(2) 1440

(3) 略

【解答】

(1) $1024=2^{10}$ との最大公約数が 1 となるものは，2 の倍数でないものである．1024 以下の 2 の倍数は $\dfrac{1024}{2}=512$ 個あるから

$$E(1024)=1024-512=\mathbf{512} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) $2015=5\cdot 13\cdot 31$ 以下の 5 の倍数，13 の倍数，31 の倍数の集合をそれぞれ $A,\ B,\ C$ とし，集合 X の要素の個数を $N(X)$ と表すことにする．2015 との最大公約数が 1 より大きいものの個数は

$$\begin{aligned}
&N(A\cup B\cup C)\\
=&N(A)+N(B)+N(C)-N(A\cap B)-N(B\cap C)-N(C\cap A)\\
&\qquad\qquad +N(A\cap B\cap C)\\
=&\frac{2015}{5}+\frac{2015}{13}+\frac{2015}{31}-\frac{2015}{5\cdot 13}-\frac{2015}{13\cdot 31}-\frac{2015}{31\cdot 5}+\frac{2015}{5\cdot 13\cdot 31}\\
=&403+155+65-31-5-13+1\\
=&575
\end{aligned}$$

よって

$$E(2015)=2015-575=\mathbf{1440} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(3) $n=p^m q^m$ (p と q は異なる素数，m は正の整数) 以下の p の倍数，q の倍数の集合をそれぞれ $P,\ Q$ とすると，n との最大公約数が 1 より大きいものの個数は

$$\begin{aligned}
N(P\cup Q)&=N(P)+N(Q)-N(P\cap Q)\\
&=\frac{n}{p}+\frac{n}{q}-\frac{n}{pq}\\
&=\frac{n}{pq}(q+p-1)
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{E(n)}{n} &= \frac{n-N(P\cup Q)}{n}\\ &= 1-\frac{q+p-1}{pq}\\ &= 1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\frac{1}{pq}\\ &= \left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\end{aligned}$$

$p<q$ としても一般性は失わない．このとき，$p \geqq 2$，$q \geqq 3$ であるから

$$1-\frac{1}{p} \geqq \frac{1}{2}, \quad 1-\frac{1}{q} \geqq \frac{2}{3}$$

よって

$$\frac{E(n)}{n} \geqq \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

が成り立つ． …… (証明終わり)