

$n$  を自然数として、次の式の値を考える.

$$f(n) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$$

- (1)  $n(n+1)(n+2)(n+3)$  が 24 の倍数であることを証明せよ.  
 (2)  $f(n) = 35$  を満たすような  $n$  の値を求めよ.  
 (3)  $n$  が  $1 \leq n \leq 35$  のとき、 $f(n)$  の値が 35 の倍数になるような  $n$  は何個あるか.

(15 青森公立大 4)

【答】

- (1) 略  
 (2)  $n = 4$   
 (3) 16

【解答】

$$f(n) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$$

- (1) 連続する 4 整数の中には、4 の倍数が 1 つ、4 の倍数でない偶数が 1 つ含まれるから、この 2 数の積は  $4 \times 2 = 8$  の倍数である.

また、連続する 4 整数の中には、3 の倍数が少なくとも 1 つ (1 つまたは 2 つ) 含まれる。8 と 3 は互いに素であるから、連続する 4 整数の積は

$$8 \times 3 = 24 \text{ の倍数} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.

- 一般に、連続する  $m$  個の整数の積は  $m!$  の倍数である.

- (2) 条件  $f(n) = 35$  を変形すると

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3) &= 24 \cdot 35 \\ &= 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \\ &= 2^2 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 7 \\ &= 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \end{aligned}$$

よって、 $n$  の値は

$$n = 4 \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.

- 方程式  $f(n) - 35 = 0$  を満たす自然数  $n$  を求める.

$$\begin{aligned} f(n) - 35 &= 0 \\ \Leftrightarrow n(n+1)(n+2)(n+3) - 24 \cdot 35 &= 0 \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &n(n+1)(n+2)(n+3) - 24 \cdot 35 \\ &= (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) - 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \\ &= (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) - 28 \cdot 30 \\ &= (n^2 + 3n - 28)(n^2 + 3n + 30) \\ &= (n - 4)(n + 7)(n^2 + 3n + 30) \end{aligned}$$

$n$  は自然数であるから  $(n+7)(n^2+3n+30) > 0$  であり、 $\textcircled{7}$  の解は

$$n = 4$$

である.

(3)  $f(n)$  の値が 35 の倍数である …… (\*)

$\iff n(n+1)(n+2)(n+3)$  が  $24 \cdot 35$  の倍数である

$24(=2^3 \cdot 3)$  と  $35(=5 \cdot 7)$  は互いに素であり, (1) より  $n(n+1)(n+2)(n+3)$  は 24 の倍数であるから

(\*)  $\iff n(n+1)(n+2)(n+3)$  が 35 の倍数である

連続する 4 整数  $n, n+1, n+2, n+3$  の中に 5 の倍数と 7 の倍数が含まれる自然数  $n$  を  $1 \leq n \leq 35$  の範囲で求める.

4 整数の中に 5, 7 を含む  $n$  は  $n = 4, 5$

4 整数の中に 7, 10 を含む  $n$  は  $n = 7$

4 整数の中に 10, 14 を含む  $n$  は 存在しない.

4 整数の中に 14, 15 を含む  $n$  は  $n = 12, 13, 14$

4 整数の中に 15, 21 を含む  $n$  は 存在しない.

4 整数の中に 20, 21 を含む  $n$  は  $n = 18, 19, 20$

4 整数の中に 21, 25 を含む  $n$  は 存在しない.

4 整数の中に 25, 28 を含む  $n$  は  $n = 25$

4 整数の中に 28, 30 を含む  $n$  は  $n = 27, 28$

4 整数の中に 35 を含む  $n$  は  $n = 32, 33, 34, 35$

であり, 求める  $n$  は

$n = 4, 5, 7, 12, 13, 14, 18, 19, 20, 25, 27, 28, 32, 33, 34, 35$

の 16 個 である.

……(答)