

複素数 α は実数でも純虚数でもないとする. $\frac{\alpha}{1+\alpha^2}$ が実数であるために α の満たすべき必要十分条件を求めよ.

(15 奈良県医大 5)

【答】 $|\alpha| = 1$

【解答】

$$\alpha \text{ は実数でも純虚数でもない} \iff \alpha \pm \bar{\alpha} \neq 0 \quad \cdots (*)$$

(*) のもとで, 条件「 $\frac{\alpha}{1+\alpha^2}$ が実数である……(**)」を変形する.

$$(**) \iff \frac{\alpha}{1+\alpha^2} = \overline{\left(\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\right)} \iff \frac{\alpha}{1+\alpha^2} - \frac{\bar{\alpha}}{1+\bar{\alpha}^2} = 0$$

$1+\alpha^2=0$ となるのは $\alpha = \pm i$ のときであるが, α は純虚数でない ($\alpha + \bar{\alpha} \neq 0$ に反する) から, $1+\alpha^2 \neq 0$ である. 同じく, $1+\bar{\alpha}^2 \neq 0$ であるから

$$(**) \iff \alpha(1+\bar{\alpha}^2) - \bar{\alpha}(1+\alpha^2) = 0$$

左辺を整理すると

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \alpha\bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha}\alpha^2 + \alpha - \bar{\alpha} \\ &= |\alpha|^2(\bar{\alpha} - \alpha) + \alpha - \bar{\alpha} \\ &= (\alpha - \bar{\alpha})(|\alpha|^2 - 1) \end{aligned}$$

であり, (*) より, $\alpha - \bar{\alpha} \neq 0$ であるから

$$(**) \iff |\alpha|^2 - 1 = 0$$

である. よって, 求める条件は

$$|\alpha| = 1$$

……(答)

である.