3 本の柱 A，B，C が立っおり，下図のように左端の柱 A に中央に穴のあいた大きさが異なる n 枚の円盤が大きい円盤から順に重ねられている．この円盤を以下の規則に従って別の柱に移動させる．

① 1 回に 1 枚の円盤しか移動できない
② 移動する円盤は 3 本の柱 A，B，C のいずれかに必ず差し込む
③ 移動する円盤はそれより小さな円盤の上には乗せない

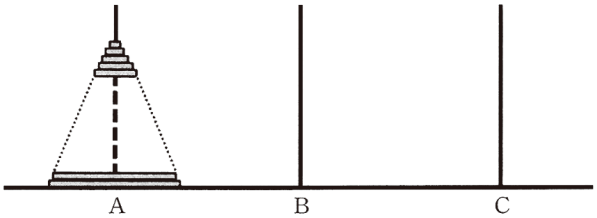

図 1

① から ③ の規則に従って n 枚の円盤を別の柱に移動させる場合に最低必要な移動回数を a_n とすると，$a_1 = 1$, $a_2 = \boxed{\text{ア}}$ である．3 枚の場合，まず上 2 枚の円盤を柱 B に移し，次に 1 番下の円盤を柱 C に移し，最後に柱 B の 2 枚の円盤を柱 C に移すことになるから $a_3 = \boxed{\text{イ}}$ である．

n 枚の円盤を移動させる場合を考える．a_n と a_{n-1} の間の関係式は $n \geqq 2$ のとき，

$$a_n = \boxed{\text{ウ}}\, a_{n-1} + \boxed{\text{エ}}$$

である．よって a_n の一般項は

$$a_n = \left(\boxed{\text{オ}}\right)^n + \boxed{\text{カ}}$$

で与えられる．

(15 北里大 理 3(1))

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ
3	7	2	1	2	-1

【解答】

a_1 について：

柱 A にある円盤は柱 B または C に移ることにより，1 枚の円盤は別の柱に移動するので

$$a_1 = 1$$

である．

a_2 について：

柱 A にある上の円盤は柱 B または C に移る．柱 B に移ったときを考える．次に下の円盤を柱 C に移し，最後に柱 B の円盤を柱 C に移すので，$a_2 = 3$ である．

A にある上の円盤が柱 C に移ったときは，次に下の円盤を柱 B に移し，最後に柱 C の円盤を柱 B に移すので，$a_2 = 3$ である．

いずれのときも 2 枚の円盤は別の柱に移動するので

$$a_2 = \mathbf{3} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

a_3 について：

まず上 2 枚の円盤を柱 B(または C) に移し，次に 1 番下の円盤を柱 C(または B) に移す．最後に柱 B(または C) の 2 枚の円盤を柱 C(または B) に移すことになるから

$$a_3 = 3 + 1 + 3 = \mathbf{7} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

a_n について：

a_3 と同じように考えて，まず上 $n-1$ 枚の円盤を柱 B(または C) に移し，次に 1 番下の円盤を柱 C(または B) に移す．最後に柱 B(または C) の $n-1$ 枚の円盤を柱 C(または B) に移すことになるから，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 2a_{n-1} + 1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．この式は

$$a_n + 1 = 2(a_{n-1} + 1)$$

と変形することができる．$\{a_n + 1\}$ は初項 $a_1 + 1 = 1 + 1 = 2$，公比 2 の等比数列であるから

$$a_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 2^n - 1} \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．