

無限数列  $\left\{ \frac{x^n - 5}{x^n + 5} \right\}$  の収束・発散について、 $x$  の値を場合分けしたうえで調べなさい。

(15 前橋工科大)

$$\text{【答】 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - 5}{x^n + 5} = \begin{cases} -1 & (|r| < 1 \text{ のとき}) \\ 1 & (|r| > 1 \text{ のとき}) \\ -\frac{2}{3} & (r = 1 \text{ のとき}) \\ \text{発散} & (r = -1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

【解答】

$x$  の値で場合分けする.

(i)  $|x| < 1$  のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - 5}{x^n + 5} = \frac{0 - 5}{0 + 5} = -1 \quad (\text{収束})$$

(ii)  $|x| > 1$  のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - 5}{x^n + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{5}{x^n}}{1 + \frac{5}{x^n}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1 \quad (\text{収束})$$

(iii)  $x = 1$  のとき

$$\frac{x^n - 5}{x^n + 5} = \frac{1 - 5}{1 + 5} = -\frac{2}{3} \quad (\text{収束})$$

(iv)  $x = -1$  のとき

(ア)  $n$  が奇数のとき

$$\frac{x^n - 5}{x^n + 5} = \frac{-1 - 5}{-1 + 5} = -\frac{3}{2}$$

(イ)  $n$  が偶数のとき

$$\frac{x^n - 5}{x^n + 5} = \frac{1 - 5}{1 + 5} = -\frac{2}{3}$$

数列  $\left\{ \frac{x^n + 3}{x^n + 2} \right\}$  は  $-\frac{3}{2}$ ,  $-\frac{2}{3}$  を振動するから、極限は存在しない. (発散)

(i)~(iv) より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - 5}{x^n + 5} = \begin{cases} -1 & (|r| < 1 \text{ のとき}) \\ 1 & (|r| > 1 \text{ のとき}) \\ -\frac{2}{3} & (r = 1 \text{ のとき}) \\ \text{発散} & (r = -1 \text{ のとき}) \end{cases} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.