1 辺の長さが 1 の正方形 A_1 とその内接円 S_1 がある．円 S_1 に内接する正方形 A_2 とその内接円 S_2 がある．このようにして，内接円 S_{n-1} に内接する正方形 A_n とその内接円 S_n がある．A_1 から A_n までの面積の総和を T_n とするとき，$\lim_{n\to\infty} T_n$ を求めよ．

(15 奈良県医大 12)

【答】 2

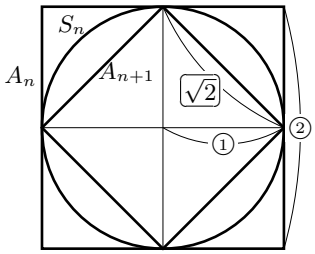
【解答】

A_n と A_{n+1} $(n \geqq 1)$ は相似であり，その相似比は

$$2 : \sqrt{2} = \sqrt{2} : 1$$

である．A_1 の面積が 1 より A_n の面積は

$$1 \cdot \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \right\}^{n-1} = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$



であり，$\lim_{n\to\infty} T_n$ は初項 1，公比 $\frac{1}{2}$ の無限等比級数である．

$0 <$ (公比) < 1 より，その和は存在し

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \mathbf{2}$$ ……(答)

である．