辺の長さが 1 の正方形を S_1 とし，S_1 に内接する円を C_1，C_1 に内接するひとつの正方形を S_2，S_2 に内接する円を C_2 とする．以下同様に，自然数 n に対し，正方形 S_n，円 C_n を定める．すなわち，正方形 S_n の内接円が C_n であり，正方形 S_{n+1} は円 C_n に内接している．

このとき，次の問いに答えよ．

(1) S_n の辺の長さを l_n とするとき，C_n の半径を l_n で表せ．

(2) 数列 $\{l_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) S_n の内部から C_n の内部を除いた部分の面積を a_n とする．$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を求めよ．

(15 神奈川大 理・工 2)

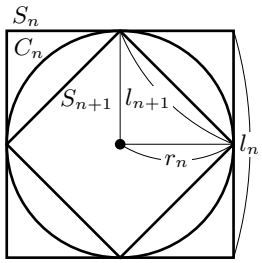
【答】

(1) $\frac{1}{2}l_n$

(2) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$

(3) $2-\frac{\pi}{2}$

【解答】



(1) 正方形 S_n，円 C_n，正方形 S_{n+1} は右のように図示できる．
円 C_n の半径を r_n とおくと

$$r_n = \boldsymbol{\frac{1}{2}l_n} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) l_{n+1} を l_n で表すと

$$l_{n+1} = \sqrt{2}r_n = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}l_n = \frac{1}{\sqrt{2}}l_n$$

であり，数列 $\{l_n\}$ は初項 $l_1 = 1$，公比 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の等比数列である．

よって，$\{l_n\}$ の一般項は

$$l_n = 1\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} = \boldsymbol{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) (1)，(2) より

$$a_n = {l_n}^2 - \pi {r_n}^2 = \left(1-\frac{\pi}{4}\right){l_n}^2 = \left(1-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{2^{n-1}}$$

である．$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は，初項 $a_1 = 1-\frac{\pi}{4}$，公比 $\frac{1}{2}$ の無限等比級数である．$0 <$ (公比) < 1 であるから，その和は

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-\frac{1}{2}} = 2a_1 = \boldsymbol{2-\frac{\pi}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．