a を実数とし，関数 $f(x)=ax^2+e^{-x^2}$ について考える．
必要ならば，$\lim_{t\to\infty} te^{-t}=0$ を用いてよい．

(1) $a=0$ のとき，$f(x)$ は $x=\pm$ $\boxed{\text{ア}}$ で変曲点をもつ．

(2) $a=0$ のとき，$f''(x)$ は $x=$ $\boxed{\text{イ}}$ で最小値 $\boxed{\text{ウ}}$ をとり，$x=$ $\boxed{\text{エ}}$ で最大値 $\boxed{\text{オ}}$ をとる．

(3) $0<a<$ $\boxed{\text{カ}}$ のとき，$f(x)$ は異なる 2 つの $x=\pm$ $\boxed{\text{キ}}$ で最小値 $\boxed{\text{ク}}$ をとる．

(4) $f(x)$ は $\boxed{\text{ケ}}$ $<a<0$ のとき変曲点を $\boxed{\text{コ}}$ 個もち，$0\leqq a<$ $\boxed{\text{サ}}$ のとき変曲点を $\boxed{\text{シ}}$ 個もち，それ以外のときは変曲点をもたない．

(15 立命館大 理系 2 月 3 日 1)

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	-2	$\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$	$4e^{-\frac{3}{2}}$	1	$\sqrt{-\log a}$	$a(1-\log a)$	$-2e^{-\frac{3}{2}}$	4	1

シ
2

【解答】

$$f(x)=ax^2+e^{-x^2}$$

(1) $a=0$ のとき

$$f(x)=e^{-x^2}$$
$$f'(x)=e^{-x^2}\cdot(-2x)=-2xe^{-x^2}$$
$$f''(x)=-2\cdot e^{-x^2}+(-2x)\cdot\left(-2xe^{-x^2}\right)=(4x^2-2)e^{-x^2}$$

$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ の前後で $f''(x)$ の符号が変化するから，$f(x)$ は

$x=\pm\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ で変曲点をもつ．　……(答)

(2) $a=0$ のとき

$f''(x)$ は偶関数であり，y 軸に関して対称なので，$x\geqq 0$ での増減を調べる．

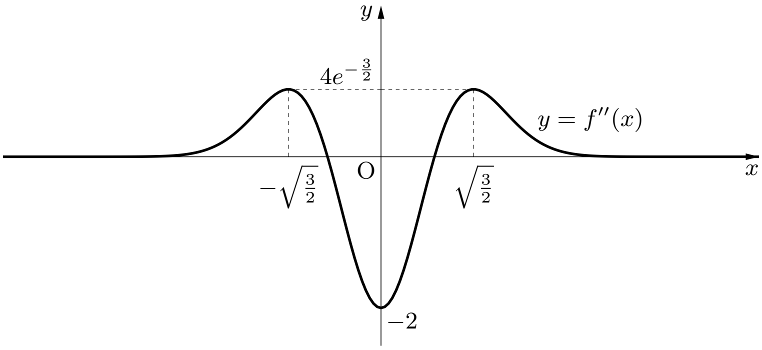
$$\begin{aligned}f'''(x)&=8x\cdot e^{-x^2}+(4x^2-2)\cdot\left(-2xe^{-x^2}\right)\\&=(-8x^3+12x)e^{-x^2}\\&=-4x(2x^2-3)e^{-x^2}\end{aligned}$$

$x\geqq 0$ における $f''(x)$ の増減は右表となる．

x	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\cdots$
$f'''(x)$		$+$	0	$-$
$f''(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

$$f''(0)=-2$$
$$f''\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\left(4\cdot\frac{3}{2}-2\right)e^{-\frac{3}{2}}=4e^{-\frac{3}{2}}$$
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}f''(x)&=\lim_{x\to\infty}(4x^2e^{-x^2}-2e^{-x^2})\\&=4\cdot 0-0\quad\left(\because\ \lim_{t\to\infty}te^{-t}=0\right)\\&=0\end{aligned}$$

$y = f''(x)$ のグラフは下図となる．



よって，$y = f''(x)$ は

$x = \mathbf{0}$ で　最小値 $\mathbf{-2}$, ……(答)

$x = \pm\sqrt{\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}}$ で　最大値 $\mathbf{4e^{-\frac{3}{2}}}$ ……(答)

をとる．

(3) $f(x) = ax^2 + e^{-x^2}$ は偶関数であり，y 軸に関して対称なので，$x \geqq 0$ での増減を調べる．

$$f'(x) = 2ax - 2xe^{-x^2} = 2x(a - e^{-x^2}) \quad \cdots\cdots ①$$

$a \geqq 1$ のとき，$x \geqq 0$ においては $a - e^{-x^2} \geqq 0$ であるから $f(x)$ は単調増加であり，実数全体において $f(x)$ が異なる 2 つの x で最小値をとることはない．

$0 < a < 1$ のとき，$x \geqq 0$ での $f(x)$ の増減は右表となり，実数全体において $f(x)$ は 2 つの x で最小値をとる．

x	0	$\cdots$	$\sqrt{-\log a}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

よって，求める a の値の範囲は

$0 < a < \mathbf{1}$ ……(答)

であり

$x = \pm\sqrt{-\log a}$ ……(答)

で

最小値 $f(\sqrt{-\log a}) = a(-\log a) + e^{-(-\log a)} = \boldsymbol{a(1 - \log a)}$ ……(答)

をとる．

(4) ① をさらに微分して

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2(a - e^{-x^2}) + 2x \cdot 2xe^{-x^2} \\ &= (4x^2 - 2)e^{-x^2} + 2a \end{aligned}$$

(2) の $y = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$ のグラフと直線 $y = -2a$ の共有点を調べると

$0 < -2a < 4e^{-\frac{3}{2}}$ のとき，すなわち

$\mathbf{-2e^{-\frac{3}{2}}} < a < 0$ のとき　変曲点を $\mathbf{4}$ 個もち， ……(答)

$-2 < -2a \leqq 0$ のとき，すなわち

$0 \leqq a < \mathbf{1}$ のとき　変曲点を $\mathbf{2}$ 個もち， ……(答)

それ以外のときは変曲点をもたない．