a を実数の定数とするとき，関数 $f(x)=(x+1)e^{-ax^2}$ について次の問いに答えよ．

(1) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(1,\ f(1))$ における接線が原点を通るとき，a の値を求めよ．

(2) $f(x)$ が $x=1$ で極値をとるような a の値を求めよ．また，このとき $f(x)$ の極値をすべて求めよ．

(3) $f(x)$ が極値をもつような a の値の範囲を求めよ．

(4) $\dfrac{1}{f(x)}$ が極値をもつような a の値の範囲を求めよ．

(15 関西学院大 理系 2 月 3 日 4)

【答】

(1) $a=-\dfrac{1}{4}$

(2) $a=\dfrac{1}{4}$，極大値 $f(1)=\dfrac{2}{\sqrt[4]{e}}$，極小値 $f(-2)=-\dfrac{1}{e}$

(3) $a<-2,\ 0<a$

(4) $a<-2,\ 0<a$

【解答】

$$f(x)=(x+1)e^{-ax^2}\ \ (a\ は実数の定数)$$

(1) $f(x)$ を微分して

$$\begin{aligned} f'(x)&=1\cdot e^{-ax^2}+(x+1)\cdot e^{-ax^2}(-2ax)\\ &=-(2ax^2+2ax-1)e^{-ax^2} \end{aligned}$$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(1,\ f(1))$，すなわち $(1,\ 2e^{-a})$ における接線の方程式は

$$y=-(4a-1)e^{-a}(x-1)+2e^{-a}$$

$$\therefore\quad y=-(4a-1)e^{-a}x+(4a+1)e^{-a}$$

である．この接線が原点 $(0,\ 0)$ を通るから

$$0=(4a+1)e^{-a}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a=-\frac{1}{4}}$$ ……(答)

である．

(2) $f(x)$ が $x=1$ で極値をとるためには，$f'(1)=0$ が必要である．このとき

$$-(4a-1)e^{-a}=0 \qquad \therefore\quad a=\frac{1}{4}$$

である．したがって $f(x)=(x+1)e^{-\frac{1}{4}x^2}$ であり

$$\begin{aligned} f'(x)&=-\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-1\right)e^{-\frac{1}{4}x^2}\\ &=-\frac{1}{2}(x+2)(x-1)e^{-\frac{1}{4}x^2} \end{aligned}$$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$f(x)$ の増減は右表となり，$f(x)$ は $x=1$ で極値をとり，十分である．

よって，求める a の値は

$$\boldsymbol{a=\frac{1}{4}}$$ ……(答)

であり

極大値 $\boldsymbol{f(1)=\dfrac{2}{\sqrt[4]{e}}}$，極小値 $\boldsymbol{f(-2)=-\dfrac{1}{e}}$ ……(答)

である．

(3) 微分可能な関数 $f(x)$ が極値をもつ条件は，$f'(x) = -(2ax^2 + 2ax - 1)e^{-ax^2}$ の符号が変化する x が存在することである．

$a = 0$ のとき $f'(x) = e > 0$ であり，条件を満たさない．

求める条件は，$a \fallingdotseq 0$ のもとで x の 2 次方程式 $2ax^2 + 2ax - 1 = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつことである．判別式を D とおくと

$$\frac{D}{4} = a^2 + 2a = a(a+2)$$

であるから，a の値の範囲は

$$\begin{cases} a \fallingdotseq 0 \\ a(a+2) > 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a < -2,\ 0 < a} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{(x+1)e^{-ax^2}}$ の定義域は $x \fallingdotseq -1$ であり

$$\left\{\frac{1}{f(x)}\right\}' = -\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2} \quad (x \fallingdotseq -1)$$

である．$\dfrac{1}{f(x)}$ が極値をもつ条件は，$\left\{\dfrac{1}{f(x)}\right\}'$ の符号が変化する，すなわち $f'(x)$ の符号が変化する x が存在することである．これは (3) より $a < -2,\ 0 < a$ である．

$2ax^2 + 2ax - 1 = 0$ は $x = -1$ を解にもたないから，求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{a < -2,\ 0 < a} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．