x の 2 次方程式 $x^2+(a+2)x+2a+b=0$ について考える．a, b を以下のように決める．サイコロを 2 回投げる．1 回目に出た目を a とする．2 回目に出た目が 4 以下のとき $b=1$ とし，5 以上のとき $b=0$ とする．

(1) この方程式が実数解を持つ確率を求めよ．

(2) この方程式について少なくとも 1 つの実数解が $x<-\dfrac{5}{2}$ となる確率を求めよ．

(15 青森公立大 2)

【答】

(1) $\dfrac{2}{3}$

(2) $\dfrac{5}{9}$

【解答】

$$x^2+(a+2)x+2a+b=0 \quad (a=1,\ 2,\ \cdots,\ 6\ ;\ b=1,\ 0) \qquad \cdots\cdots\ (*)$$

(1) 方程式 $(*)$ が実数解をもつ条件は，判別式を D とおくと，$D \geqq 0$ である．

$$\begin{aligned} D &= (a+2)^2-4(2a+b) \\ &= a^2-4a+4-4b \\ &= (a-2)^2-4b \end{aligned}$$

であるから，条件は

$$(a-2)^2-4b \geqq 0$$

であり，この不等式を満たす a, b は

$b=1$ のとき，$a=4,\ 5,\ 6$

$b=0$ のとき，$a=1,\ 2,\ \cdots,\ 6$ (a は任意)

である．$b=1$ となる確率は $\dfrac{4}{6}$，$b=0$ となる確率は $\dfrac{2}{6}$ であるから，求める確率は

$$\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6}+\frac{2}{6}\times 1=\frac{2}{6}+\frac{2}{6}=\boldsymbol{\frac{2}{3}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $f(x)=x^2+(a+2)x+2a+b$ とおく．「方程式 $(*)$ が $x<-\dfrac{5}{2}$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ」 $\cdots\cdots\ (*)$ ための a, b の条件を $y=f(x)$ のグラフの軸 $x=-\dfrac{a+2}{2}$ の位置で場合分けしながら求める．

(i) $-\dfrac{a+2}{2}<-\dfrac{5}{2}$ $(3<a)$ のとき

$$\begin{aligned} &(*) \iff D \geqq 0 \\ \therefore\ \ &(a-2)^2-4b \geqq 0 \end{aligned}$$

(i) の範囲のもとで，この不等式を満たす a, b は

$b=1$ のとき，$a=4,\ 5,\ 6$

$b=0$ のとき，$a=4,\ 5,\ 6$

である．

(ii) $-\dfrac{a+2}{2} \geqq -\dfrac{5}{2}$ $(a \leqq 3)$ のとき

$$(*) \iff f\left(-\frac{5}{2}\right) < 0$$

$f\left(-\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{25}{4} - \dfrac{5(a+2)}{2} + 2a + b = \dfrac{5-2a+4b}{4}$ であるから，(ii) の範囲のもとで，この不等式を満たす組 a，b は

$b=1$ のとき，$9-2a<0$ であり a は存在しない．

$b=0$ のとき，$5-2a<0$ であり $a=3$

である．

求める確率は

$$\left(\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6}+\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}\right)+\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{12+6+2}{6\cdot 6}=\boldsymbol{\frac{5}{9}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．