$\triangle$ABC において，AB $= 3$，BC $= 5$，$\angle$ABC $= 120^\circ$ とする．

このとき，AC $=$ $\boxed{\text{オ}}$，$\sin\angle\mathrm{ABC} = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$ であり，

$\sin\angle\mathrm{BCA} = \dfrac{\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ である．

直線 BC 上に点 D を，AD $= 3\sqrt{3}$ かつ $\angle$ADC が鋭角，となるようにとる．点 P を線分 BD 上の点とし，$\triangle$APC の外接円の半径を R とすると，R のとり得る値の範囲は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} \leqq R \leqq \boxed{\text{セ}}$ である．

(15 センター本試 I・A 2(2))

オ	カ	キ	ク	ケ	コサ	シ	ス	セ
7	3	2	3	3	14	7	2	7

解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

余弦定理，正弦定理を用いた基本問題です．図を描きながら問題を読んでいきましょう．

【解答】

△ABC において余弦定理を用いると

$$\mathrm{AC}^2 = 3^2 + 5^2 - 2\cdot 3\cdot 5\cos 120^\circ = 49$$

$$\therefore \quad \mathrm{AC} = \underset{\text{オ}}{\boxed{7}} \qquad \cdots\cdots ①$$

⟵ 前半は余弦定理，正弦定理の小手調べ．
チェクリピ 余弦定理
チェクリピ 正弦定理

また，

$$\sin\angle\mathrm{ABC} = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{\overset{\text{カ}}{\boxed{3}}}}{\underset{\text{キ}}{\boxed{2}}}$$

⟵ この設問なら $\boxed{\text{オ}}$ の前においてもらいたいですね．

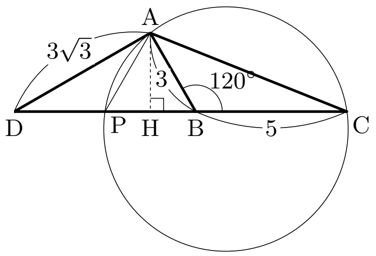
△ABC において正弦定理を用いると，①より

$$\frac{3}{\sin\angle\mathrm{BCA}} = \frac{7}{\sin 120^\circ}$$

$$\sin\angle\mathrm{BCA} = 3\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{7} = \frac{\overset{\text{ク}}{\boxed{3}}\sqrt{\overset{\text{ケ}}{\boxed{3}}}}{\underset{\text{コサ}}{\boxed{14}}}$$

点 P は線分 BD 上を動くから，頂点 A から線分 BD におろした垂線の足を H とおくと

⟵ ここから後半，まずは与えられた条件を図にしてみよう．



$$\mathrm{AH} \leqq \mathrm{AP} \leqq \mathrm{AD} \qquad \therefore \quad 3\sin 120^\circ \leqq \mathrm{AP} \leqq 3\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad \frac{3\sqrt{3}}{2} \leqq \mathrm{AP} \leqq 3\sqrt{3} \qquad \cdots\cdots ②$$

R は △APC の外接円の半径より，正弦定理を用いると

$$\frac{\mathrm{AP}}{\sin\angle\mathrm{PCA}} = 2R$$

$$\therefore \quad R = \frac{1}{2}\times\frac{\mathrm{AP}}{\frac{3\sqrt{3}}{14}} = \frac{7}{3\sqrt{3}}\mathrm{AP} \quad (\because\ \angle\mathrm{PCA} = \angle\mathrm{BCA})$$

⟵ R を AP を用いて表した．

②より

$$\frac{7}{3\sqrt{3}}\times\frac{3\sqrt{3}}{2} \leqq R \leqq \frac{7}{3\sqrt{3}}\times 3\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad \frac{\overset{\text{シ}}{\boxed{7}}}{\underset{\text{ス}}{\boxed{2}}} \leqq R \leqq \underset{\text{セ}}{\boxed{7}}$$