$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，不等式

$$2(\cos 4x - 1)\cos x - 3(\cos 3x + \cos x) > 0$$

を満たす x の値の範囲を求めよ．

(15 京都府大 生命環境 1(3))

【答】 $\dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{\pi}{2}$

【解答】

$$2(\cos 4x - 1)\cos x - 3(\cos 3x + \cos x) > 0$$

2 倍角の公式より

$$\cos 4x - 1 = (2\cos^2 2x - 1) - 1 = 2\cos^2 2x - 2$$

和を積に直す公式より

$$\cos 3x + \cos x = 2\cos 2x \cos x$$

であるから，与えられた不等式は

$$2(2\cos^2 2x - 2)\cos x - 3 \cdot 2\cos 2x \cos x > 0$$
$$2(2\cos^2 2x - 3\cos 2x - 2)\cos x > 0$$
$$2(2\cos 2x + 1)(\cos 2x - 2)\cos x > 0$$

つねに $\cos 2x - 2 < 0$ であり，$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos x > 0$ なので

$$2\cos 2x + 1 < 0 \qquad \therefore \quad \cos 2x < -\frac{1}{2}$$

となる．$0 \leqq 2x < \pi$ より

$$\frac{2}{3}\pi < 2x < \pi \qquad \therefore \quad \boldsymbol{\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．