$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，方程式 $1 - \cos^2 x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x$ を解け．

(15 信州大 工 1(2))

---

【答】 $x = 0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

---

【解答】

$$1 - \cos^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x$$

2 倍角の公式を用いると

$$\sin^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \sin x \cos x$$

$$\sin x(\sin x - \sqrt{3} \cos x) = 0$$

$$\therefore \quad \sin x = 0 \text{ または } \sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$$

第 2 式において，$\cos x = 0$ とすると，$\sin x = 0$ となり不合理であり，$\cos x \neq 0$ であるから

$$\sin x = 0 \text{ または } \tan x = \sqrt{3}$$

である．$0 \leqq x < 2\pi$ であるから，求める解は

$$\boldsymbol{x = 0,\ \pi,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 左辺において半角の公式を用いると

$$1 - \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\sin 2x \cos \frac{\pi}{6} + \cos 2x \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき $\dfrac{\pi}{6} \leqq 2x + \dfrac{\pi}{6} < 4\pi + \dfrac{\pi}{6}$ であり

$$2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi,\ \frac{17}{6}\pi$$

$$\therefore \quad x = 0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{4}{3}\pi$$

である．