x と y が連立方程式

$$\begin{cases} \sin x + \cos x + \sin y + \cos y = a \\ \sin x - \cos x - \sin y + \cos y = b \end{cases}$$

を満たしている．次の問いに答えなさい．ただし，$0 \leqq x \leqq 2\pi,\ 0 \leqq y \leqq 2\pi$ とする．

(1) $\sin(x+y)$ を $a,\ b$ で表しなさい．

(2) $b=0$ かつ $a \neq 0$ のとき $\sin x + \cos x$ を a で表しなさい．

(3) $a=0,\ b=2\sqrt{2}$ のとき，この連立方程式を解きなさい．

(15 産業医大 医 3)

【答】

(1) $\sin(x+y) = \dfrac{a^2+b^2}{4} - 1$

(2) $\sin x + \cos x = \dfrac{a}{2}$

(3) $x = \dfrac{3}{4}\pi,\ y = \dfrac{7}{4}\pi$

【解答】

$$(*) \begin{cases} \sin x + \cos x + \sin y + \cos y = a \\ \sin x - \cos x - \sin y + \cos y = b \end{cases}$$

(1) $(*)$ を変形すると

$$(*) \iff \begin{cases} 2(\sin x + \cos y) = a+b \\ 2(\cos x + \sin y) = a-b \end{cases}$$

$$\iff (**) \begin{cases} \sin x + \cos y = \dfrac{a+b}{2} \\ \cos x + \sin y = \dfrac{a-b}{2} \end{cases}$$

$(**)$ の辺々を 2 乗して加えると

$$2 + 2\sin x\cos y + 2\cos x\sin y = \frac{2a^2+2b^2}{4}$$

$$\sin x\cos y + \cos x\sin y = \frac{a^2+b^2}{4} - 1$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\sin(x+y) = \frac{a^2+b^2}{4} - 1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $b=0$ のとき，$(**)$ は

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = \dfrac{a}{2} \\ \cos x + \sin y = \dfrac{a}{2} \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} \cos y = \dfrac{a}{2} - \sin x \\ \sin y = \dfrac{a}{2} - \cos x \end{cases}$$

$\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ に代入して y を消去すると

$$\left(\frac{a}{2} - \sin x\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - \cos x\right)^2 = 1$$

$$\frac{a^2}{2} - a\sin x - a\cos x + 1 = 1$$

$a \neq 0$ より

$$\boldsymbol{\sin x + \cos x = \frac{a}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) $a=0,\ b=2\sqrt{2}$ のとき，$(**)$ は

$$(**)'\begin{cases}\sin x+\cos y=\sqrt{2}\\ \cos x+\sin y=-\sqrt{2}\end{cases}$$

となる．(1) の結果は

$$\sin(x+y)=\frac{0+8}{4}-1 \qquad \therefore\quad \sin(x+y)=1$$

であり，$0\leqq x\leqq 2\pi,\ 0\leqq y\leqq 2\pi$ より，$0\leqq x+y\leqq 4\pi$ なので

$$x+y=\frac{\pi}{2} \text{ または } \frac{\pi}{2}+2\pi \qquad \cdots\cdots ①$$

が必要である．いずれのときも

$$\sin y=\cos x,\quad \cos y=\sin x$$

が成り立つ．このとき $(**)'$ は

$$\begin{cases}\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases} \qquad \therefore\quad x=\frac{3}{4}\pi$$

① より $y=-\dfrac{\pi}{4}$ または $\dfrac{7}{4}\pi$ となるが，$0\leqq y\leqq 2\pi$ より

$$y=\frac{7}{4}\pi$$

である．

以上より，連立方程式 $(*)$ の解は

$$\boldsymbol{x=\frac{3}{4}\pi,\ y=\frac{7}{4}\pi} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．