次の問いに答えよ．

(1) 等式 $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin 3\theta$ が成り立つことを示せ．

(2) 方程式 $8x^3 - 6x + 1 = 0$ が $\sin\dfrac{\pi}{18}$ を解にもつことを示せ．

(3) 方程式 $8x^3 - 6x + 1 = 0$ のすべての解が実数であることを示せ．

(15 富山県大 工 3)

【答】

(1) 略

(2) 略

(3) 略

【解答】

(1) 加法定理を用いると

$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= \sin(2\theta + \theta)\\ &= \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta\\ &= 2\sin\theta\cos\theta\cdot\cos\theta + (1 - 2\sin^2\theta)\cdot\sin\theta \quad (\because\ 2\text{ 倍角の公式})\\ &= 2\sin\theta(1 - \sin^2\theta) + \sin\theta - 2\sin^3\theta\\ &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta\end{aligned}$$

が成り立つ． …… (証明終わり)

(2) $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ に $\theta = \dfrac{\pi}{18}$ を代入すると

$$\begin{aligned}\sin\frac{\pi}{6} &= 3\sin\frac{\pi}{18} - 4\sin^3\frac{\pi}{18}\\ -4\sin^3\frac{\pi}{18} + 3\sin\frac{\pi}{18} &= \frac{1}{2}\\ 8\sin^3\frac{\pi}{18} - 6\sin\frac{\pi}{18} + 1 &= 0\end{aligned}$$

よって，方程式 $8x^3 - 6x + 1 = 0$ は $\sin\dfrac{\pi}{18}$ を解にもつ． …… (証明終わり)

(3) $\sin\dfrac{\pi}{18} = \gamma$ とおき，方程式 $8x^3 - 6x + 1 = 0$ の γ 以外の 2 解を $\alpha,\ \beta$ とおく．
解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha + \beta + \gamma = 0\\ \alpha\beta\gamma = -\dfrac{1}{8}\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha + \beta = -\gamma\\ \alpha\beta = -\dfrac{1}{8\gamma}\end{cases}$$

が成り立つ．$\alpha,\ \beta$ は 2 次方程式 $t^2 + \gamma t - \dfrac{1}{8\gamma} = 0$ の 2 解である．

$$(\text{判別式}) = \gamma^2 - 4\left(-\frac{1}{8\gamma}\right) = \gamma^2 + \frac{1}{2\gamma} > 0 \quad (\because\ \gamma > 0)$$

よって，$\alpha,\ \beta$ も実数であり，$8x^3 - 6x + 1 = 0$ の解はすべて実数である． …… (証明終わり)

- $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ が方程式 $8x^3 - 6x + 1 = 0$ の解であることは

$$(*)\begin{cases}\alpha + \beta + \gamma = 0\\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -\dfrac{3}{4}\\ \alpha\beta\gamma = -\dfrac{1}{8}\end{cases}$$

であることと同値であり，解答では $(*)$ を

$$(*) \iff \begin{cases} \alpha+\beta=-\gamma \\ \alpha\beta=-\dfrac{1}{8\gamma} \\ -\dfrac{1}{8\gamma}-\gamma\cdot\gamma=-\dfrac{3}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha+\beta=-\gamma \\ \alpha\beta=-\dfrac{1}{8\gamma} \\ 8\gamma^3-6\gamma+1=0 \end{cases}$$

と変形した．また $(*)$ は

$$(*) \iff \begin{cases} \alpha+\beta=-\gamma \\ \alpha\beta+\gamma(-\gamma)=-\dfrac{3}{4} \\ \left(\gamma^2-\dfrac{3}{4}\right)\cdot\gamma=-\dfrac{1}{8} \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha+\beta=-\gamma \\ \alpha\beta=\gamma^2-\dfrac{3}{4} \\ 8\gamma^3-6\gamma+1=0 \end{cases}$$

と変形することもできる．この変形の後は 2 次方程式

$$t^2+\gamma t+\gamma^2-\frac{3}{4}=0$$

を考えて，$\gamma=\sin\dfrac{\pi}{18}$ に注意すると

$$(\text{判別式})=\gamma^2-4\left(\gamma^2-\frac{3}{4}\right)=3(1-\gamma^2)>0 \quad (\because\ 0<\gamma<1)$$

が確認される．

- (2) をヒントに他の 2 つの実数解をみつけてもよい．

$$\sin 3\theta=\frac{1}{2}$$

となる θ は，n を整数として

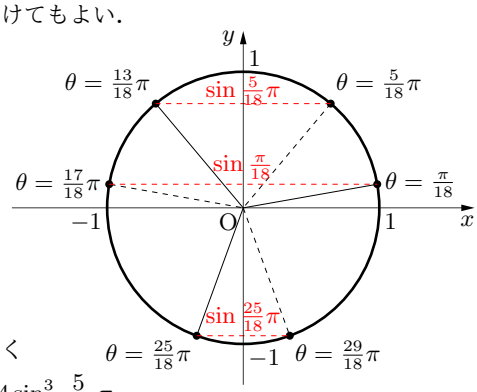
$$3\theta=\frac{\pi}{6}+2n\pi,\ \frac{5}{6}\pi+2n\pi$$

$$\theta=\frac{\pi}{18}+\frac{2n}{3}\pi,\ \frac{5}{18}\pi+\frac{2n}{3}\pi$$

と表すことができ，右図より

$$\sin\frac{\pi}{18},\ \sin\frac{5}{18}\pi,\ \sin\frac{25}{18}\pi$$

は異なる 3 つの実数である．(2) と同じく



$$\sin\left(3\cdot\frac{5}{18}\pi\right)=3\sin\frac{5}{18}\pi-4\sin^3\frac{5}{18}\pi$$

$$\therefore\quad 8\sin^3\frac{5}{18}\pi-6\sin\frac{5}{18}\pi+1=0$$

$$\sin\left(3\cdot\frac{25}{18}\pi\right)=3\sin\frac{25}{18}\pi-4\sin^3\frac{25}{18}\pi$$

$$\therefore\quad 8\sin^3\frac{25}{18}\pi-6\sin\frac{25}{18}\pi+1=0$$

であり，$\sin\dfrac{5}{18}\pi$，$\sin\dfrac{25}{18}\pi$ も $8x^3-6x+1=0$ の解であり，すべての解は実数である．

- (1)，(2) を無視して，曲線 $y=8x^3-6x+1$ と x 軸との共有点の状態を調べてもよい．

$f(x)=8x^3-6x+1$ とおくと

$$f'(x)=24x^2-6$$
$$=6(2x+1)(2x-1)$$

であり，$y=f(x)$ の増減は右表となる．

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

$$\text{極大値}: f\left(-\frac{1}{2}\right)=8\left(-\frac{1}{2}\right)^3-6\left(-\frac{1}{2}\right)+1=-1+3+1=3>0$$

$$\text{極小値}: f\left(\frac{1}{2}\right)=8\left(\frac{1}{2}\right)^3-6\cdot\frac{1}{2}+1=1-3+1=-1<0$$

であり，$y=f(x)$ のグラフは x 軸と異なる 3 点で交わる．

よって，方程式 $f(x)=0$ は異なる 3 つの実数解をもつ．すなわち，解のすべては実数である．