次の問いに答えよ.

(1) $\tan\dfrac{x}{2}=m$ とするとき，等式 $\sin x=\dfrac{2m}{1+m^2}$，$\cos x=\dfrac{1-m^2}{1+m^2}$ が成り立つことを示せ.

(2) $-\pi<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\sin x+\cos x\geqq\tan\frac{x}{2}$$

(15 徳島大 工・医・総合科 5)

【答】

(1) 略

(2) 略

【解答】

(1) $\tan\dfrac{x}{2}=m$ のとき，2 倍角の公式と $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ より

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2m}{1+m^2}\qquad\cdots\cdots\text{(証明終わり)}$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-m^2}{1+m^2}\qquad\cdots\cdots\text{(証明終わり)}$$

- $\tan\dfrac{x}{2}=m$ が存在することから，$\cos\dfrac{x}{2}\neq 0$ であり，分母・分子を $\cos\dfrac{x}{2}$ で割ることができる.
- 次のように変形してもよい.

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2m}{1+m^2}$$

$$\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1=\frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}}-1=\frac{2}{1+m^2}-1=\frac{1-m^2}{1+m^2}$$

(2) (1) より

$$\begin{aligned}&\sin x+\cos x-\tan\frac{x}{2}\\&=\frac{2m}{1+m^2}+\frac{1-m^2}{1+m^2}-m=\frac{2m+(1-m^2)-m(1+m^2)}{1+m^2}\\&=\frac{1+m-m^2-m^3}{1+m^2}=\frac{1+m-m^2(1+m)}{1+m^2}\\&=\frac{(1+m)^2(1-m)}{1+m^2}\end{aligned}$$

$-\pi<x<\dfrac{\pi}{2}$ より $-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{x}{2}<\dfrac{\pi}{4}$ であり

$$m=\tan\frac{x}{2}<1\qquad\therefore\quad 1-m>0$$

であるから，(上式) $\geqq 0$，すなわち

$$\sin x+\cos x\geqq\tan\frac{x}{2}$$

が成り立つ. $\cdots\cdots$(証明終わり)